This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

~~Sci 6085.50~~

Bound

PER 5575

MAR 18 1909

Harvard College Library

FROM

Gift

SCIENCE CENTER LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MATHESIS

Digitized by Google

Digitized by Google

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Professeur ordinaire à l'Université de Gand, | Professeur ordinaire à l'Université de Liége
Anciens élèves de l'École normale des sciences,
Membres de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis
PH. BERT

TROISIÈME SÉRIE.

TOME VIII.

(TOME XXVII DE LA COLLECTION).

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
21-23, RUE DU CALVAIRE, 21-23

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1908

Digitized by Google

137-30
Sa 865.50

ABRÉVIATIONS.

BB, Bulletin de l'Académie royale de Belgique.

CR, Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

NAM, Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

NCM, Nouvelle Correspondance Mathématique (de 1874 à 1880).

JME (ou JMS), Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS de 1881 à 1897, ensuite par G. MARIAUD de 1897 à 1901.

1M, Intermédiaire des Mathématiciens, fondé en 1894 par MM. LAISANT et LEMOINE

AFAS, Association française pour l'avancement des sciences.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué successivement par BORCHARDT, par KRONECKER et WEIERSTRASS, par KRONECKER etc. (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-332 signifie Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 332.

Digitized by Google

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Professeur ordinaire à l'Université de Gand, | Professeur ordinaire à l'Université de Liége
Anciens élèves de l'École normale des sciences,
Membres de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis
PH. BRET

TROISIÈME SÉRIE.

TOME VIII — JANVIER 1907.

(TOME XXVII DE LA COLLECTION).

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
21-23, RUE DU CALVAIRE, 21-23

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1908

Digitized by Google

EN VENTE CHEZ M. GAUTHIER-VILLARS A PARIS ET M. HOSTE A GAND.

Mathesis. Tome I (280 pages), 1881. II (272 p.). 1882. III (292 p.), 1883. IV (324 p.), 1884. V (432 p.), 1885. VI (368 p.), 1886. (**Rares**), VII (408 p.), 1887. VIII (353 p.), 1888. IX (344 p.), 1889. X (312 p.), 1890. XI (347 p.), 1891. XII (366 p.), 1892. XIII (381 p.), 1893. XIV (295 p.). 1894. XV (364 p.), 1895. XVI (396 p.), 1899. XVII (336 p.), 1897. XVIII (348 p.), 1898. XIX (312 p.), 1899. XX (318 p.), 1900. XXI (343 p.), 1901. XXII (334 p.), 1902. XXIII (312 p.), 1903. XXIV (384 p.), 1904. XXV (336 p.), 1905. XXVI (384 p.), 1906. XXVII (344 p.) 1907. Gr. in-8°. Gand, fr. 7 50; à Paris, fr. 9 00.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par Liouville (1836), continué (1875) par H. Resal, publié, depuis 1885, en livraisons trimestrielles, par C. Jordan. Prix de l'abonnement, *pris à Paris*, 30 fr.; union postale 35 00

PGV = PARIS, GAUTHIER-VILLARS LT = LEIPZIG, B. G. TEUBNER.

Z. de Galdeano. 1. Consideraciones sobre Filosofia y enseñanza de la Matemática, 1907 (In-8° de 115 pp.). 2. Exposición sumaria de las teorias matematicas, 1907 (In-8° de 208 pp.) . . . . . Pesetas 2.00 + 4.00

P. Worms de Romilly. Sur les premiers principes des sciences mathématiques. Paris, Hermann, 1908 (In-8° de 51 pp.) . . . . . fr. 2.50

W. Rouse Ball. Histoire des mathématiques, traduite par L. Freund, avec des additions de R. de Montessus. Paris, Hermann, 1907 (In-8° de 271 pp.). fr. 8 00

G. Fazzari. Breve Storia delle Matematica. Dai tempi antichi al Medio Evo. Milano, Palermo, Napoli, R. Sandron. [1907] (In-12 de 267 pp.). Lire 4 00

Schwering. Handbuch der Elementar-Mathematik für Lehrer. LT, 1907 (In-8° cartonné de VIII-408 pp. avec 193 fig. dans le texte) . . . . . marcs 8 00

W. Rouse Ball. Recréations mathématiques, etc. Deuxième édition française avec des additions par J. Fitz-Patrick. Première partie. Paris, Hermann, 1907 (In-12 de VIII-336 pp.) . . . . . fr. 5 00

F. Sommer Vorlesungen über Zahlentheorie. LT, 1907 (In-8, cartonné de VI-361 pp.) . . . . . marcs 11 00

E. Dumont. Cours de Trigonométrie à l'usage des candidats aux Écoles spéciales. Bruxelles, chez l'auteur, rue Verte, 152 (In-8° de XIV-288 pp.; 4 planches) . . . . . fr. 6 00

A. del Re. Lezioni di Algebra della Logica. Napoli, de Rubertis, 1907 (In-8° de VIII-104 pp.). . . . . Lire 3 50

F. J. Vaes. Graphische Voorstellingen en de Beginselen der Differentiaal- en Integraalrekening. Harlem, P. Visser, 1907 (In-8° de VII-176 pp. avec 55 fig. . . . . .

E. Czuber. Vorlesungen über Differential- und Integral-Rechnung, Zweite Auflage. LT, 1906 (Deux vol. in-8°, cartonnés de XIV-560 et VIII-582 pp). marcs 24 00

A. Crefcœur. Cours d'analyse. Deuxième partie. Calcul des différences et Calcul des variations. Anvers, De Vlijt, 1905 (110 pp. in-8°) . .

Digitized by Google

MATHESIS

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT PESANT A LA SURFACE DE LA TERRE,

par M. C. E. Wastеels.

1 On sait que, si l'on tient compte de la rotation de la Terre par rapport aux étoiles fixes et qu'on suppose la pesanteur constante, les équations différentielles du mouvement d'un point pesant peuvent s'intégrer exactement; mais comme l'intégration exacte ne présente guère qu'un intérêt purement théorique, la plupart des traités ne donnent qu'une solution approchée des équations. Dans la présente note, nous arrivons à la solution exacte par la géométrie vectorielle et nous obtenons ainsi des formules susceptibles d'une interprétation géométrique très simple; nous traitons ensuite, par le même procédé, des problèmes plus généraux.

Soient A le point matériel de masse m, A_0 sa position à l'instant $t_0 = 0$, $\overline{A_0A} = \bar{r}$ la coordonnée vectorielle de A par rapport à la Terre et $\bar{v}$ sa vitesse relative; si $\bar{g}$ représente l'accélération constante due à la pesanteur et $\bar{\omega}$ la rotation de la Terre, nous aurons

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = m\bar{g} + 2m.\mathcal{M}v\bar{\omega},$$

ou

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g} + 2\mathcal{M}v\bar{\omega}. \tag{1}$$

Décomposons $\bar{r}$, $\bar{v}$ et $\bar{g}$ suivant $\bar{\omega}$ et une direction perpendiculaire et désignons les composantes respectivement par $\bar{r}_1$, $\bar{v}_1$, $\bar{g}_1$ et $\bar{r}_2$, $\bar{v}_2$, $\bar{g}_2$; l'équation (1) pourra être remplacée par les deux équations

$$\frac{d\bar{v}_1}{dt} = \bar{g}_1, \tag{2}$$

$$\frac{d\bar{v}_2}{dt} = \bar{g}_2 + 2\mathcal{M}v_2\bar{\omega}. \tag{3}$$

Digitized by Google

De (2) on tire

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_{10} + \bar{g}_1 t, \qquad \bar{r}_1 = \bar{v}_{10} t + \bar{g}_1 \frac{t^2}{2}.$$

On peut satisfaire à (3) par une fonction de la forme

$$\bar{v}_2 = \bar{a} + e^{b\mu t}\bar{c},$$

dans laquelle $\bar{a}$, b et $\bar{c}$ sont des constantes, e la base des logarithmes népériens, tandis que μ est le symbole de la fonction linéaire $\mu\bar{r} \equiv \mathcal{M}\bar{u}\bar{r}$, $\bar{u}$ désignant l'unité vectorielle dirigée suivant $\bar{\omega}$; en effet, cette relation donne

$$\frac{d\bar{v}_2}{dt} = b\mu e^{b\mu t}\bar{c}, \qquad \mathcal{M}\bar{v}_2\bar{\omega} = -\omega\mu\bar{v}_2 = -\omega\mu(\bar{a} + e^{b\mu t}\bar{c});$$

on doit donc avoir

$$b\mu e^{b\mu t}\bar{c} = \bar{g}_2 - 2\omega\mu\bar{a} - 2\omega\mu e^{b\mu t}\bar{c}.$$

Pour identifier les deux membres, il suffit de prendre

$$\bar{g}_2 - 2\omega\mu\bar{a} = 0 \quad \text{ou} \quad \bar{a} = \frac{-\mu\bar{g}_2}{2\omega}, \quad \text{et} \quad b = -2\omega.$$

Par suite,

$$\bar{v}_2 = -\frac{1}{2\omega}\mu\bar{g}_2 + e^{-2\omega\mu t}\bar{c}.$$

Pour déterminer $\bar{c}$, exprimons que la valeur initiale de $\bar{v}_2$ est $\bar{v}_{20}$; il vient

$$\bar{v}_{20} = -\frac{1}{2\omega}\mu\bar{g}_2 + \bar{c}.$$

Par intégration, on obtient

$$\bar{r}_2 = -\frac{1}{2\omega}\mu\bar{g}_2 t + \frac{1}{2\omega}\mu(e^{-2\omega\mu t} - 1)\bar{c}.$$

Ainsi, $\bar{v}$ et $\bar{r}$ sont données par les deux équations

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = \bar{v}_0 + \bar{g}_1 t + (e^{-2\omega\mu t} - 1)\bar{c}, \tag{4}$$

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 = \bar{v}_{10} t + \bar{g}_1 \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2\omega}\mu\bar{g}_2 t + \frac{1}{2\omega}\mu(e^{-2\omega\mu t} - 1)\bar{c}. \tag{5}$$

3. *Interprétation des équations.* L'équation (4) montre que l'hodographe est une hélice tracée sur un cylindre dont l'axe est parallèle à $\bar{\omega}$; l'extrémité de la vitesse décrit cette hélice d'un mouvement uniforme, la vitesse angulaire autour de l'axe étant égale à -2ω. Le

Digitized by Google

rayon du cylindre est égal à ∞; il est donc très grand; de sorte que, pour des valeurs ordinaires de t, le terme $(e^{-2\omega\mu t} - 1)\bar{c}$ diffère peu de $-2\omega\mu t(\bar{c} - \bar{v}_{20}) = \bar{g}_2 t$; on retrouve ainsi la valeur approchée $\bar{v} = \bar{v}_0 + (\bar{g}_1 + \bar{g}_2)t = \bar{v}_0 + \bar{g}t$.

Prenons maintenant la loi des espaces : remarquons que, dans l'équation (5), la somme des trois premiers termes du second membre représente la coordonnée vectorielle $\overline{A_0A'}$ d'un point mobile A′ dont l'accélération constante serait égale à $\bar{g}_1$ et la vitesse initiale à $\bar{v}_{10} - \frac{1}{2\omega}\mu\bar{g}_2$; le point A′ décrirait donc une trajectoire parabolique.

Le dernier terme $\frac{1}{2\omega}\mu(e^{-2\omega\mu t} - 1)\bar{c} = (e^{-2\omega\mu t} - 1)\mu\frac{\bar{c}}{2\omega}$ peut être considéré comme la coordonnée géométrique d'un point animé d'un mouvement circulaire uniforme ; le cercle est situé dans un plan perpendiculaire à $\bar{\omega}$; son rayon est égal à $\frac{c}{2\omega}$ et la vitesse angulaire à -2ω.

D'après cela, on peut concevoir le mouvement de A comme étant celui d'un point décrivant uniformément un arc de cercle, tandis que celui-ci est animé de la translation de A′. La coordonnée vectorielle initiale du centre par rapport à A_0 est égale à $\frac{1}{2\omega}\mu\bar{o}$.

Cherchons une valeur approchée de $\bar{r}$ pour des valeurs ordinaires de t; nous conserverons les termes en ω et ω^2, et nous déterminerons une limite supérieure de l'erreur.

Après quelques calculs, on trouve

$$\bar{r} = \bar{v}_0 t + \bar{g}\frac{t^2}{2} - \omega t^2\mu\left(\bar{v}_{20} + \bar{g}_2\frac{t}{3}\right) - \frac{\omega^2 t^3}{6}(4\bar{v}_{20} + \bar{g}_2 t)$$
$$+ \frac{\omega^3 t^4}{15}\mu(5\vartheta_1\bar{v}_{20} + \theta_2\bar{g}_2 t) + \frac{\omega^4 t^5}{45}(6\theta_2\bar{v}_{20} + \theta_3\bar{g}_2 t),$$

les quantités θ_1, θ_2 et θ_3 étant comprises entre 0 et $+1$.

Les termes en ω^3 et ω^4 peuvent être remplacés par

$$\alpha\frac{\omega^3 t^4}{45}(17 \mid v_{20} \mid + 4 \mid g_2 t \mid)\bar{u}_1, \quad (0 \leq \alpha < 1),$$

$\bar{u}_1$ étant l'unité vectorielle normale à $\bar{\omega}$.

Digitized by Google

La valeur de $\bar{r}$ peut donc s'écrire

$$\bar{r} = \bar{v}_0 t + \bar{g}\frac{t^2}{2} - \omega t^2 \mu \left(\bar{v}_0 + \bar{g}\frac{t}{3}\right) - \frac{\omega^2 t^3}{6}(4\bar{v}_{20} + \bar{g}_2 t)$$

$$+ \alpha \frac{\omega^2 t^4}{45}(17 \mid v_{20} \mid + 4 \mid g_2 t \mid)\bar{\omega}_1.$$

3. Remarque. La formule (4) peut être établie très simplement par la cinématique. En effet, soient O le pôle de l'hodographe et $\overline{OV} = \bar{v}$; la vitesse du point V est

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g} + 2\mathcal{M}\bar{v}\bar{\omega} = \bar{g} + \mathcal{M}(-2\bar{\omega})\bar{v};$$

or, le vecteur représenté par le second membre n'est autre chose que la vitesse due à une translation $\bar{g}$ et à une rotation $-2\bar{\omega}$ passant par O; $\bar{g}$ étant décomposée en $\bar{g}_1$ et $\bar{g}_2$ comme plus haut, on peut composer $\bar{g}_2$ et la rotation en une rotation unique $-2\bar{\omega}$; l'axe de cette rotation passe par le point O′ déterminé par la coordonnée vectorielle

$$\overline{OO'} = -\mu \frac{\bar{g}_2}{2\bar{\omega}}.$$

Le mouvement de V se ramène donc à une rotation constante $-2\bar{\omega}$ autour d'un axe fixe et à une translation uniforme de vitesse $\bar{g}_1$ suivant cet axe; c'est donc un mouvement hélicoïdal uniforme. Par suite,

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{g}_1 t + (e^{-2\omega\mu t} - 1)\bar{c},$$

en prenant $$\bar{c} = \bar{v}_{20} - \overline{OO'} = \bar{v}_{20} + \mu\frac{\bar{g}_2}{2\omega}.$$

On retrouve donc la formule (4). Par intégration, on en déduit la loi des espaces comme précédemment.

4. *Généralisation.* Supposons que le point pesant soit soumis à une résistance de milieu proportionnelle à $\bar{v}$; on aura, en désignant par k une constante,

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g} - k\bar{v} + 2\mathcal{M}\bar{v}\bar{\omega}. \qquad (6)$$

Essayons une solution de la forme

$$\bar{v} = \bar{a} + e^{(\beta + b\mu)t}\bar{c},$$

dans laquelle β est une constante, $\bar{c}$ un vecteur constant de direction

Digitized by Google

quelconque, les autres lettres ayant les mêmes significations que ci-dessus. On en tire

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = (\beta + b\mu)e^{(\beta + b\mu)t}\bar{c},$$

$$\mathcal{M}\bar{v}\bar{\omega} = -\omega\mu\bar{v} = -\omega\mu\bar{a} - \omega\mu e^{(\beta + b\mu)t}\bar{c}.$$

Il faut donc avoir

$$(\beta + b\mu)e^{(\beta + b\mu)t}\bar{c} = \bar{g} - k\bar{a} - ke^{(\beta + b\mu)t}\bar{c} - 2\omega\mu\bar{a} - 2\omega\mu e^{(\beta + b\mu)t}\bar{c}.$$

Il suffit de poser

$$\beta = -k, \qquad \bar{g} = (k + 2\omega\mu)\bar{a}, \qquad b = -2\omega.$$

La deuxième relation donne

$$\bar{a} = (k + 2\omega\mu)^{-1}\bar{g} = \left[\frac{1}{k} + \frac{2\omega\mu(2\omega\mu - k)}{k(k^2 + 4\omega^2)}\right]\bar{g}.$$

La valeur de $\bar{c}$ se détermine par la condition

$$\bar{v}_0 = \bar{a} + \bar{c}.$$

Enfin, par intégration, on obtient

$$\bar{r} = \bar{a}t + (\beta + b\mu)^{-1}[e^{(\beta + b\mu)t} - 1]\bar{c} = \bar{a}t + \left[\frac{1}{\beta} + \frac{b\mu(b\mu - \beta)}{\beta(b^2 + \beta^2)}\right][e^{(\beta + b\mu)t} - 1]\bar{c}.$$

REMARQUE. Si, dans cette relation, on fait tendre k vers zéro, on retrouve la formule (5).

5 Les équations différentielles (1) et (6) sont des cas particuliers de la suivante

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{g} + \varphi\bar{v}, \tag{7}$$

φ étant le symbole d'une fonction linéaire quelconque.

L'intégration de cette équation se ramène à celle de

$$\frac{d\bar{v}_1}{dt} = \varphi\bar{v}_1, \tag{8}$$

qui a pour intégrale (*)

$$\bar{v}_1 = e^{\varphi t}\bar{c};$$

(*) Voir le *Cours de Mécanique* de M. MASSAU. Dans le tome II, 1896, p. 65, il étend cette méthode d'intégration au problème du mouvement d'un point sollicité par une force dont les composantes sont des fonctions linéaires de $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$.

Digitized by Google

dès lors, posons, dans l équation (7),

$$\bar{v} = \bar{a} + \bar{v}_1,$$

$\bar{a}$ étant une constante; on devra avoir

$$\frac{d\bar{v}_1}{dt} = \bar{g} + \varphi\bar{a} + \varphi\bar{v}_1;$$

d'où $$\bar{g} + \varphi\bar{a} = 0; \qquad \bar{a} = -\varphi^{-1}\bar{g}.$$

Cette solution suppose donc que le vecteur $\varphi^{-1}\bar{g}$ existe.

On aura alors

$$\bar{v} = -\varphi^{-1}\bar{g} + e^{\varphi t}\bar{c}.$$

On détermine c par la condition

$$\bar{v}_0 = -\varphi^{-1}\bar{g} + \bar{c}.$$

Une nouvelle intégration donne

$$\bar{r} = -\varphi^{-1}\bar{g}t + \varphi^{-1}(e^{\varphi t} - 1)\bar{c}.$$

Si $\varphi^{-1}\bar{g}$ n'existe pas, on sait que tous les vecteurs $\varphi\bar{v}$ sont parallèles à un plan P ou à une droite D, et que $\varphi\bar{v} = 0$, si $\bar{v}$ est parallèle à une droite déterminée D′ dans le premier cas, ou à un plan déterminé P′ dans le second. Comme la discussiou complète de ces cas est assez longue, nous nous bornerons à en faire connaître les conclusions.

Premier cas : I. D′ *n'est pas contenue dans* P.

Si l'on décompose $\bar{g}$ en deux composantes $\bar{g}'$ et $\bar{g}_1$ suivant D′ et le plan P, on obtient

$$\bar{v} = \bar{g}'t + \bar{a} + e^{\varphi t}\bar{c}, \qquad \bar{a} = -\varphi^{-1}\bar{g}_1, \qquad \bar{c} = \bar{v}_0 - \bar{a};$$

$$\bar{r} = \bar{g}'\frac{t^2}{2} + \bar{a}t + \varphi^{-1}(e^{\varphi t} - 1)\bar{c}.$$

II. D′ *est contenue dans* P. Prenons une droite quelconque G′ non parallèle à D′ et dont la transformée soit parallèle à D′; décomposons ensuite $\bar{g}$ en $\bar{g}'$ et $\bar{g}_1$ suivant G′ et le plan P; on obtient

$$\bar{v} = \left(1 + \frac{t}{2}\varphi\right)\bar{g}'t + \bar{a} + e^{\varphi t}\bar{c}, \qquad \bar{a} = -\varphi^{-1}\bar{g}_1, \qquad \bar{c} = \bar{v}_0 - \bar{a};$$

$$\bar{r} = \left(1 + \frac{t}{3}\varphi\right)\bar{g}'\frac{t^2}{2} + \bar{a}t + \varphi^{-1}(e^{\varphi t} - 1)\bar{c}.$$

Digitized by Google

Second cas : I. D *n'est pas contenue dans* P'.

Si l'on décompose $\bar{g}$ en $\bar{g}_1$ et $\bar{g}'$ et $\bar{v}$ en $\bar{v}_1$ et $\bar{v}'$ suivant D et le plan P', on trouve les équations suivantes, où φ joue le rôle d'une constante numérique,

$$\bar{v} = \bar{g}'t + \bar{a} + e^{\varphi t}\bar{c}, \qquad \bar{a} = -\varphi^{-1}\bar{g}_1 + \bar{v}'_0, \qquad \bar{c} = \bar{v}_0 - \bar{a};$$

$$\bar{r} = g'\frac{t^2}{2} + \bar{a}t + \varphi^{-1}(e^{\varphi t} - 1)\bar{c}.$$

II. D *est contenue dans* P'. *Si* $\bar{g}$ *est parallèle à* P', on trouve

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + (\bar{g} + \varphi\bar{v}_0)t,$$

$$\bar{r} = \bar{v}_0 t + (\bar{g} + \varphi\bar{v}_0)\frac{t^2}{2}.$$

Si $\bar{g}$ *n'est pas parallèle à* P', on obtient

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + (\bar{g} + \varphi\bar{v}_0)t + \varphi\bar{g}\frac{t^2}{2},$$

$$\bar{r} = \bar{v}_0 t + (\bar{g} + \varphi\bar{v}_0)\frac{t^2}{2} + \varphi\bar{g}\frac{t^3}{6}.$$

APPLICATIONS DES DÉTERMINANTS.

M. Cwojdzinski (Zürich) a publié dans l'*Archiv der Mathematik und Physik*, (3), V, p. 118 et IX, p. 8, des relations intéressantes entre les distances de points et de droites d'un même plan. Nous croyons utile de les reproduire ici, avec de légères modifications dans les démonstrations.

1. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées cartésiennes rectangulaires de trois points M_1, M_2, M_3, et soient

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0, \quad x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0,$$
$$x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3 = 0,$$

les équations de trois droites a_1, a_2, a_3. Posons

$$\delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \sin\alpha_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 \end{vmatrix},$$

$$d_{rs} = x_r\cos\alpha_s + y_r\sin\alpha_s - p_s.$$

Digitized by Google

Faisons le produit des déterminants δ, Δ en combinant les colonnes ; il vient

$$\delta\Delta = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Le déterminant (1) s'annule lorsque les points M_1, M_2 M_3 sont en ligne droite ou que les droites a_1, a_2, a_3 passent par un même point:

Si aucune de ces hypothèses n'a lieu, appelons S, S′ les aires des triangles $a_1a_2a_3$, $M_1M_2M_3$, et h_1, h_2, h_3, a_1, a_2, a_3, R les hauteurs, les longueurs des côtés du triangle $a_1a_2a_3$ et le rayon du cercle circonscrit. En faisant coïncider le triangle $M_1M_2M_3$ avec le triangle $a_1a_2a_3$, on réduit l'égalité (1) à

$$2S\Delta = \begin{vmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{vmatrix} = \frac{8S^3}{a_1a_2a_3} = \frac{2S^2}{R};$$

d'où $\Delta = \frac{S}{R}$. Donc, dans le cas général, on a la relation connue

$$\frac{2SS'}{R} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}.$$

2. Si l'on opère de la même manière sur les deux systèmes rectangulaires

$$\begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 & \dots & \cos\alpha_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n, & \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \sin\alpha_3 & \dots & \sin\alpha_n, \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -p_1 & -p_2 & -p_3 & \dots & -p_n \end{array}$$

on trouve la relation suivante entre les distances de n points M_1, M_1 . . M_n à n droites a_1, a_2, ... a_n :

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdot & \cdot & d_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Supposons $n = 4$ et prenons pour a_1, a_2, a_3, a_4 les droites M_1M_2, M_2M_3. M_3M_4, M_1M_4 ; on obtient alors la question d'examen 1221 de *Mathesis*, p. 143.

Digitized by Google

3. Représentons maintenant la droite a_r par $u_r x + v_r y + w_r = 0$ et faisons, en combinant les colonnes, le produit des déterminants

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_6^2 \\ y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_6^2 \\ 2x_1y_1 & 2x_2y_2 & \dots & 2x_6y_6 \\ 2x_1 & 2x_2 & \dots & 2x_6 \\ 2y_1 & 2y_2 & \dots & 2y_6 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} u_1^2 & u_2^2 & \dots & u_6^2 \\ v_1^2 & v_2^2 & \dots & v_6^2 \\ u_1v_1 & u_2v_2 & \dots & u_6v_6 \\ u_1w_1 & u_2w_2 & \dots & u_6w_6 \\ v_1w_1 & v_2w_2 & \dots & v_6w_6 \\ w_1^2 & w_2^2 & \dots & w_6^2 \end{vmatrix}$$

que nous désignons par δ, Δ. Après avoir posé $d_{rs} = u_s x_r + v_s y_r + w_s$ on obtient

$$\delta\Delta = \begin{vmatrix} d_{11}^2 & d_{12}^2 & \dots & d_{16}^2 \\ d_{21}^2 & d_{22}^2 & \dots & d_{26}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{61}^2 & d_{62}^2 & \dots & d_{66}^2 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Le déterminant (2) s'annule lorsque les points M_1, M_2, ... M_6 sont sur une même conique ($\delta = 0$) ou que si les six droites a_1, a_2, . . a_6 sont tangentes à une même conique ($\Delta = 0$).

4. Si l'on remplace les déterminants δ, Δ par des systèmes rectangulaires de 6 lignes et n colonnes ($n > 6$), on voit que le déterminant formé avec les carrés des distances de n points à n droites est nul.

M. Gwojdzinski a indiqué l'extension des relations précédentes aux puissances p^{es} des distances de points donnés à des droites données dans l'espace ou à des plans donnés.

NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Un théorème de Pappus.* Soient ABC un triangle quelconque, AB*ba*, AC*ca'* deux parallélogrammes quelconques construits sur les côtés AB, AC, α le point d'intersection des droites *ba*, *ca'* prolongées au besoin; δ, D les intersections de αA, prolongé aussi si c'est nécessaire, avec $\beta\gamma$, BC; Bβ, Cγ des parallèles à Aα rencontrant *ba*α, *ca'*α en β, γ. *Le parallélogramme* BC$\gamma\beta$ = BD$\delta\beta$ + DC$\gamma\delta$ *est équivalent* à la somme des parallélogrammes BA$\alpha\beta$ et CA$\alpha\gamma$ et, par suite, *à la somme des parallélogrammes* AB*ba*, AC*ca'*.

Cette proposition est la première du livre IV des *Collections* de Pappus. Elle contient, comme cas très particulier, ainsi que Pappus le fait observer, la démonstration de la proposition relative au carré

Digitized by Google

de l'hypoténuse, qui a été attribuée à B. de Saint-Venant (*Mathesis*, 1905. pp. 207-208, 1907, supplément de novembre, p. 13). Le théorème de Pappus est exposé dans l'*Euclide* de Commandin (Pise, 1572) à propos du théorème d'Euclide (VI, 31) : un rectangle construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des rectangles semblables construits sur les deux autres côtés; et dans l'*Euclide* de Clavius (peut-être dès la première édition, Rome, 1574, certainement dans la seconde, Rome 1589, p. 241), à propos du théorème (I, 47) sur le carré de l'hypoténuse.

Beaucoup de manuels de géométrie plus récents contiennent le théorème de l'appus et l'appliquent aux carrés construits sur les côtés d'un triangle rectangle ou même d'un triangle quelconque.

×**2**. *Note arithmetique.* Si $ab - \alpha\beta = 1$, on a l'identité

$$(a\alpha - b\beta)^2 + (2\alpha\beta + 1)^2 - (a\alpha + b\beta)^2 = 1,$$

qui permet d'*obtenir une somme algébrique de carrés égale à* 1.

Ainsi, si $a = 2$, $b = 2$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$, on a

$$4^2 + 7^2 - 8^2 = 1.$$

Si $a = 3$, $b = 3$, $\alpha = 8$, $\beta = 1$, on a

$$17^2 + 21^2 - 27^2 = 1, \text{ etc.}$$

De même,

$$1 = 7^2 + 11^2 - 13^2 = 8^2 + 9^2 - 12^2 = 29^2 + 11^2 - 31^2.$$

(E. N Barisien).

3. *Formules relatives aux cercles tritangents.* 1. Désignons par I, I_a, I_b. I_c, 0, les centres des cercles tritangents et circonscrit : par r, r_a, r_b, r_c, R leurs rayons; par p, $p_a = p - a$, $p_b = p - b$, $p_c = p - c$ les segments déterminés sur les côtés du triangle ABC entre leurs extrémités et le point de contact d'un cercle tritangent Les formules suivantes présentent un certain intérêt :

$$a^2 + b^2 + c^2 = p^2 + p_a^2 + p_b^2 + p_c^2,$$

$$p_a p_b + p_b p_c + p_c p_a = ab - p_c^2 = bc - p_a^2 = ca - p_b^2 = \tfrac{1}{4}(2\Sigma ab - \Sigma a^2).$$

$$ab = p_a p_b + p p_c, \quad bc = p_b p_c + p p_a, \quad ca = p_c p_a + p p_c;$$

$$p^2 = \Sigma ab - (p_a p_b + p_b p_c + p_c p_a), \quad abc - \Sigma a p_a^2 = 2 p_a p_b p_c,$$

$$\Sigma a p_a^2 = \Sigma a p_b p_c, \quad \Sigma \frac{a p_a}{p_b p_c} = \Sigma \frac{a}{p_a}, \quad abc - \Sigma a p_b p_c = 2 p_a p_b p_c,$$

$$p \Sigma p_a p_b = abc + p_a p_b p_c, \quad a p_a^2 - (b p_c^2 + c p_b^2) = abc = 2 p p_b p_c, \ldots$$

Digitized by Google

2. Soient (D, E, F), (D_a, E_a, F_a),... les points de contact des côtés BC, CA, AB respectivement avec les cercles I, I_a..., et désignons par S, σ, σ_a,... les aires des triangles ABC, DEF, $D_aE_aF_a$,... On a

$$\frac{\sigma}{S} = \frac{2p_ap_bp_c}{abc} = \frac{r}{2R}, \quad \frac{\sigma_a}{S} = \frac{2pp_bp_c}{abc} = \frac{r_a}{2R}, \ldots;$$

$$\sigma : \sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = \frac{1}{p} : \frac{1}{p_a} : \frac{1}{p_b} : \frac{1}{p_c} = r : r_a : r_b : r_c,$$

$$S = \tfrac{1}{2}(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c - \sigma),$$

$$\sigma = \text{aire } D_aE_bF_c, \quad \sigma_a = \text{aire } DE_cF_b \ldots$$

3. Nous avons emprunté les formules précédentes, déjà connues en partie, à un article de M. Hagge (Zeitschrift de Hoffmann, XXXVIII, p. 42-47). Le même auteur cherche la relation entre les distances $MA = \rho_a$, $MB = \rho_b$, $MC = \rho_c$ d'un point quelconque M du cercle inscrit DEF aux sommets. Il trouve, à la suite de calculs pénibles,

$$\Sigma a \frac{\rho_a^2}{p_a} - \Sigma \frac{\rho_a^2}{p_a} \cdot \frac{\rho_b^2}{p_b} = p_ap_b + p_bp_c + p_cp_a. \tag{1}$$

Ed. Lucas a indiqué la relation suivante (*Mathesis*, 1889, p. 177) :

$$\Sigma u\rho_a^2 - 2pr(2R + r) = 0. \tag{2}$$

La méthode des coordonnées tripolaires développée par cet ingénieux géomètre, légèrement modifiée pour ce cas spécial, est la suivante. La figure étant rapportée à deux diamètres rectangulaires du cercle I, soient (x, y), (x_1, y_1) (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des points M, A, B, C. On a

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \rho_a^2.$$

La seconde équation peut prendre la forme

$$r^2 - 2xx_1 - 2yy_1 + x_1^2 + y_1^2 = \rho_a^2$$

Or, $x_1^2 + y_1^2 = AI^2 = r^2 + p_a^2$; donc

$$2xx_1 + 2yy_1 = 2r^2 + p_a^2 - \rho_a^2.$$

En éliminant x et y entre cette équation et les deux analogues, on obtient

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 2r^2 + p_a^2 - \rho_a^2 \\ x_2 & y_2 & 2r^2 + p_b^2 - \rho_b^2 \\ x_3 & y_3 & 2r^2 + p_c^2 - \rho_c^2 \end{vmatrix}.$$

Digitized by Google

Les mineurs relatifs à la troisième colonne du déterminant, sont les doubles des aires des triangles IBC, ICA, IAB et égaux à ar, br, cr ; par suite on peut écrire

$$\Sigma a\rho_a^2 = 4pr^2 + \Sigma ap_a^2 = 4pr^2 + abc - 2p_a p_b p_c = 4pr^2 + 4Rpr - 2pr^2$$
$$= 2pr(2R + r).$$

Voici une autre méthode. On sait que le lieu d'un point M dont les distances à trois points fixes vérifient une relation de la forme

$$\lambda\rho_a^2 + \mu\rho_b^2 + \nu\rho_c^2 = K,$$

est une circonférence dont le centre a pour coordonnées barycentriques dans le triangle ABC les quantités λ, μ, ν. De la réciproque, on conclut pour le cercle inscrit

$$a\rho_a^2 + b\rho_b^2 + c\rho_c^2 = K.$$

La valeur de K peut se déterminer en plaçant M en D; alors $\rho_b = p_b$, $\rho_c = p_c$, $\rho_a = AD$. Or, le théorème de Stewart donne

$$b^2p_b^2 + c^2p_c^2 = a.A\overline{D}^2 + ap_bp_c, \text{ etc.}$$

La différence entre les relations (1) et (2) s'explique par cette circonstance, qu'il existe une identité entre les six distances a, b, c, ρ_a, ρ_b, ρ_c.

(J. N.).

×4. *Curiosités arithmétiques.* I. On a

$$37 = 3^2 + 7^2 - 3.7.$$
$$37(3 + 7) = 3^3 + 7^3;$$
$$3.7.37 = 777.$$

37 est le seul nombre de deux chiffres qui, multiplié par la somme de ses chiffres soit égal à la somme des cubes de ces chiffres.

II. $$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + 9^2 = 14^2;$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 9^3 = 10^2 + 11^3;$$
$$5^3 + 6^3 + 10^3 + 12^3 = 4^3 + 17^3 = 7^3 + 16^3.$$

III. Le produit $(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2)$ peut se décomposer de 18 manières différentes en sommes de quatre carrés. En effet, ce produit est égal à

$$(aa' + bb' + cc')^2 + (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2;$$

mais on peut remplacer a', b', c' par b', c', a' ou c', a', b', ou a', c', b'... ou encore par a', b', $-c'$ ou par a', $-b'$, $-c'$, etc. (E. N. Barisien).

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE.

Les nombres positifs. Exposé des théories modernes sur l'Arithmétique élémentaire par M. STUYVAERT, Docteur spécial en mathématiques, Répétiteur à l'Université de Gand. Gand, Van Goethem, 1906. (In-8° de XII-133 pp.) Prix : 3 francs.

I. « Cet ouvrage s'adresse particulièrement aux classes supérieures de la section scientifique des athénées »; c'est une révision bien coordonnée et approfondie de l'arithmétique élémentaire. L'auteur a senti une lacune entre l'enseignement moyen plus ou moins intuitif et le cours universitaire sur la théorie des nombres.

Partant de la notion de nombre entier cardinal (collection d'objets) l'auteur en déduit, par une voie purement logique, les théorèmes relatifs aux quatre opérations, en admettant toutefois comme postulat l'invariance du nombre ou (ce qui revient au même) la propriété commutative de l'addition.

Le 1er chapitre renferme en outre les théories élémentaires de la divisibilité, du plus grand commun diviseur, du moindre multiple, des nombres premiers avec les théorèmes de Fermat et de Wilson; il se termine par une théorie générale des caractères de divisibilité d'un nombre écrit dans un système à base quelconque.

La première extension de la notion de nombre naturel devrait être logiquement le nombre négatif. Le titre du volume indique que M. Stuyvaert n'en parle pas; il est d'usage en Belgique et en France, de n'étudier les nombres négatifs que dans le cours d'Algèbre. Cependant, dans une répétition systématique des éléments, il serait bon d'insister sur le principe de permanence comme le font par exemple les auteurs de l'Encyclopédie des sciences mathématiques.

Les chapitres II et III sont consacrés aux nombres fractionnaires et incommensurables.

L'égalité de deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ est définie par l'égalité $ad = bc$; pour justifier cette convention l'auteur montre : 1° qu'elle contient comme cas particulier l'égalité des nombres entiers; 2° que deux fractions égales à une troisième sont égales entre elles. Les fractions décimales sont considérées comme des cas particuliers des fractions ordinaires et la conversion des fractions est exposée sans recourir à la notion de limite.

Quant aux nombres incommensurables, la théorie est basée sur l'idée de coupure, de M. Dedekind; quelques théorèmes sur les limites ont trouvé leur place dans le même chapitre qui se termine par des notions sur les erreurs et les opérations abrégées.

Enfin dans un dernier chapitre sur « La mesure des grandeurs », l'auteur établit une correspondance entre les nombres et les rapports des grandeurs; il montre en particulier dans quel cas cette correspondance réalise la proportionnalité » (L. KOLLROS, *Enseignement mathématique*, 15 mai 1907, IX, pp. 248-249).

Digitized by Google

II. Nous croyons utile d'ajouter à cette analyse du livre de M. Stuyvaert quelques remarques complémentaires, touchant un point d'histoire de l'enseignement mathématique dans notre pays et ailleurs; puis une critique sur une question de méthode où nous ne sommes pas d'accord avec l'auteur.

A. Son livre est dédié à la mémoire de J.-F. Dauge, qui fut professeur de méthodologie mathématique, de géométrie analytique et d'astronomie à l'Université de Gand, de 1858 à 1898. Le cours de méthodologie mathématique de Gand, longtemps le seul qui existât dans l'enseignement universitaire du monde entier, avait été créé en 1851 et confié de 1851 à 1854, à Lefrançois, de 1854 à 1858, à Schaar. Lefrançois, autant que nous avons pu le savoir par la tradition, exposait dans ce cours, des compléments de géométrie pure, relatifs aux courbes et aux surfaces du second ordre; Schaar y fit entrer des notions assez étendues sur la théorie des nombres. Dauge, qui leur succéda, ne supprima rien de ce que ses prédécesseurs avaient introduit dans le cours de méthodologie, il développa même considérablement tout ce qui se rapportait à la géométrie, en résumant toute la partie essentielle du grand Mémoire de Chasles de 1837, sur la *dualité et l'homographie*. Vingt ans plus tard, la forme de cette partie du cours de Dauge pouvait sembler surannée : mais en 1858, y avait-il beaucoup d'Universités où l'on donnât sous une forme quelconque, les principes de la géométrie projective? Le principal mérite de Dauge ne fut d'ailleurs pas d'avoir ainsi fait connaître le travail capital de Chasles, mais d'avoir fait un vrai cours de méthodologie, en examinant les principes des mathématiques élémentaires d'une manière critique: ce n'est qu'au XX^{e} siècle que des cours semblables ont été introduits dans quelques universités allemandes. A Gand, dès 1858, Dauge enseignait avec rigueur les principes fondamentaux sur les quantités négatives et les quantités imaginaires; il exposait la théorie des limites et les bases de l'analyse infinitésimale à propos de la géométrie; il refutait les fausses démonstrations du postulatum d'Euclide, etc.. etc. Un peu plus tard, très peu après Baltzer et Hoüel, il faisait connaître à ses élèves la géométrie lobatchefskienne. C'est donc bien à Dauge, bien qu'il ait eu des prédécesseurs titulaires du même cours que lui, que l'on doit l'introduction, dans l'enseignement universitaire, de la Méthodologie mathématique, dans le sens propre du mot, et M. Stuyvaert a eu raison de le dire dans sa Préface.

B. Mais dans cette préface, l'auteur oppose le mode d'exposition de Dauge, qu'il appelle la *méthode intuitive*, à la *méthode abstraite* surtout employée en Allemagne depuis quelques années. Selon nous, il a tort, parce que, *au fond*, les deux méthodes sont identiques : *l'esprit humain est ainsi fait que c'est toujours sur des concepts, abstraits des données empiriques, qu'il raisonne*. Mais on peut employer des mots plus ou moins chargés d'images pour exposer ses raisonnements. Si ces mots s'adressent peu à l'imagination, on dit que l'on emploie la méthode abstraite; dans le cas contraire, que l'on emploie la méthode intuitive; mais cette différence de langage ne constitue pas, nous semble-t-il, une différence essentielle entre les deux modes d'exposition. D'illustres géomètres, Lagrange, Abel, Weierstrass, Hermite, Kronecker préfèrent la méthode abstraite dans l'exposition de leurs recherches; d'autres

Digitized by Google

tout aussi grands, Monge, Cauchy, Riemann se servent du langage géométrique de l'autre méthode. Dans l'enseignement, c'est la méthode la plus imagée qui réussit le mieux.

Si l'on admet que les vues précédentes sont justes, comme nous le croyons, on sera amené à rejeter la théorie abstraite des fractions telle qu'elle est exposée par Schubert dans l'*Encyclopédie mathématique* et par M. Stuyvaert dans son livre. C'est, en effet, de la considération de vraies fractions concrètes, que l'on a tiré l'idée, le concept de fraction abstraite, puis par le raisonnement, on a établi la théorie des fractions avec autant de rigueur que celle des nombres entiers. Les auteurs de la théorie abstraite des fractions ont refait avec des mots moins imagés l'ancienne théorie sans y rien ajouter d'essentiel; c'est l'ancienne théorie aussi qui les a guidés dans le choix de leurs définitions purement formelles : cela revient à dire qu'elle est plus naturelle et, par suite, qu'elle doit être préférée dans l'enseignement, non seulement élémentaire, mais aussi dans celui où l'on s'occupe de la critique des principes.

Evidemment, il faut aussi faire connaître la méthode abstraite aux futurs professeurs, puisqu'elle a des partisans. C'est dire que nous recommandons à nos étudiants en sciences mathématiques, sur ce point comme sur les autres, la lecture du livre de M. Stuyvaert, mais en ayant soin de leur dire : *N'éteignez pas votre imagination, votre faculté intuitive,* car elle est un auxiliaire puissant de la raison pure. (P M.)

---

1. **Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre** von Dr H. Bruns, Professor der Astronomie an der Universität in Leipzig. Leipzig und Berlin, Teubner, 1906. (In 8°, cartonné de VIII, 323 pp.) Prix : 8,40 marcs.

2. **Vorlesungen über mathematische Statistik** von Dr. E. Blaschhke, A O. Professor an der technischen Hochschule in Wien. Leipzig und Berlin, Teubner, 1906. (In-8° cartonné de VIII-268 pp.) Prix : 7,10 marcs.

3. **Traité des Assurances sur la vie** avec développements sur le calcul des probabilités, par le Professeur U. Broggi, traduit de l'Italien par S. Lattès, Docteur ès Sciences, etc. Paris, A. Hermann, 1807. (Petit in-8° de XI-306 pp). Prix : 7 fr. 50.

4. **Die Ausgleichungsrechnung** nach der Methode der kleinsten Quadrate met Anwendungen auf die Geodesie, die Physik und die Theorie der Messinstrumente von F. R. Helmert, Direktor des Königlich preussischen geodätischen Instituts, etc. Leipzig und Berlin, Teubner, 1907 (In-8° cartonné de XVIII-578 pp.). Prix : 16 marcs.

Les quatre ouvrages dont nous venons de transcrire les titres sont tous remarquables à des titres divers, mais traitent de sujets qui sont presque complètement en dehors du programme de *Mathesis*.

Le premier est un traité de calcul des probabilités (leçons 1-10) avec les applications à la statistique et aux moyennes sous une forme très personnelle (leçons 11-19), suivies d'indications très étendues sur la manière dont doivent

Digitized by Google

être conduits les calculs numériques relatifs à ces applications (leçons 20-24 et tables numériques).

« Dans le livre de M. Blaschke; l'auteur passe en revue tous les problèmes fondamentaux de la statistique; il les expose souvent de façon originale et en citant des applications et des exemples numériques nombreux; son enseignement, sans jamais négliger la théorie, conserve le caractère pratique exigé par le sujet. » (GALBRUN, dans le *Bulletin des sciences mathématiques*, mars 1907, 1re partie, pp. 67-68).

Le *Traité des assurances sur la vie* de M. Broggi, traduit par M. Lattès, « comprend l'exposition des théorèmes fondamentaux du calcul des probabilités, la théorie statistique de la mortalité, le calcul des primes et des réserves, enfin la théorie du risque. De nombreuses notes renvoient à des ouvrages traitant de questions analogues et constituent une bibliographie précieuse (*Id.*, Ibid , pp. 71-73). »

Le livre de M. Helmert est l'ouvrage le plus étendu et le plus autorisé sur la méthode des moindres carrés et ses applications à la géodésie, à la physique et à la théorie des instruments.

Formules pour la mesure des surfaces et des volumes, plus 300 formules relatives aux polyèdres réguliers, par l'abbé E GELIN, professeur au Collège Saint-Quirin, à Huy, Namur, librairie Wesmael, ou Huy, chez l'auteur. — Prix : 0,50 fr.

Cette brochure de 16 pages renferme : 1° les formules, avec les énoncés, pour la mesure des surfaces et des volumes, y compris le prismatoïde, le tonneau et le tore; 2° 285 formules relatives aux polygones réguliers, où l'on peut puiser de nombreux exercices sur les radicaux ; 3° les valeurs des côtés des polygones réguliers, de n, $2n$ et mn côtés, inscrits dans un cercle, en fonction du rayon de ce cercle: 4° 60 formules relatives aux polyèdres réguliers.

La librairie Gauthier Villars (55, quai des Grands-Augustins) vient de publier, comme chaque année, l'**Annuaire du Bureau des Longitudes** pour 1908. Suivant l'alternance adoptée, ce Volume, de millésime pair, contient, outre les données astronomiques, des Tableaux relatifs à la Physique, à la Chimie, à l'Art de l'Ingénieur Cette année, nous signalons tout spécialement les Notices de M. BIGOURDAN : **La distance des astres et en particulier des étoiles fixes**, et celle de M. F. GUYOU : **L'école d'astronomie pratique de l'Observatoire royal de Montsouris**. In-16 de plus de 950 pages avec figures et planches : **1 fr, 50, (franco. 1 fr, 85).**

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 1467.

(Voir *Mathesis*, (3), IV, p. 104).

Trouver toutes les courbes dont les axes centraux sont les normales principales d'une autre courbe.

Evidemment, les deux courbes appartiennent à une même famille, qu'on demande de caractériser au point de vue intrinsèque.

On a un exemple de ces courbes, en considérant sur le cône engendré par les côtés d'un angle droit qui tourne autour de la bissectrice, deux géodésiques symétriques par rapport à l'axe. (E. CESÁRO).

La solution de cette question se trouvait d'avance dans *Mathesis*, 1900, (2), X, pp. 39-41, dans un article de Cesàro lui même, intitulé : *Remarques sur certaines questions de géométrie intrinsèque* (Ibid., pp. 5-11, 37-42, 57-62).

Questions 1602.

(Voir *Mathesis* (3), VII, p. 32)

Chercher le conoïde droit dont les asymptotiques se projettent sur un plan normal à l'axe suivant des lemniscates. (J. ROSE)

Solution par M. ABRAMESCU (Botosanu). Soient $x=u$, $y=uv$, $z=\varphi(v)$ les équations paramétriques de la surface conoïde $z=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

L'équation du plan tangent étant

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

A, B, C doivent satisfaire aux deux relations :

$$A\frac{dx}{du}+B\frac{dy}{du}+C\frac{dz}{du}=0, \quad A\frac{dx}{dv}+B\frac{dy}{dv}+C\frac{dz}{dv}=0. \qquad (1)$$

Ces coefficients étant calculés, on a pour une ligne asymptotique,

$$A\,dx+B\,dy+C\,dz=0, \quad A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0,$$

(*) Nous avons reçu, trop tard pour pouvoir les signaler, de bonnes solutions des questions 1640, par MM. Baidaf (Jassy), Abramescu, Van Dinter, Prange et Wargny; 1628 et 1632, par M. Fr. Dupont.

Digitized by Google

la première a lieu d'elle même, et, en la différentiant, on voit que la seconde peut être remplacée par

$$dA\,dx + dB\,dy + dC\,dz = 0\,; \qquad (2)$$

telle est l'équation différentielle cherchée.

Pour le conoïde, les relations (1) deviennent

$$A + Bv = 0, \quad Bu + C\varphi'(v) = 0\,;$$

on peut donc prendre $C = -u$, $A = -v\varphi'(v)$, $B = \varphi'(v)$, et l'équation (2) sera

$$u\varphi''(v)\,dv^2 - 2\varphi'(v)\,du\,dv = 0.$$

On a d'abord la solution $v = \text{const.}$, qui donne les génératrices rectilignes ; en divisant par dv, il reste

$$\frac{\varphi''(v)\,dv}{\varphi'(v)} = \frac{2du}{u},$$

d'où l'on tire $u^2 = C\varphi'(v)$, et les projections des lignes asymptotiques du second système sur le plan des xy ont pour équation

$$x^2 = C\varphi'\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (3)$$

Or, l'équation des lemniscates étant

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} = \frac{1 - \dfrac{y^2}{x^2}}{\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right)^2}, \qquad (4)$$

pour qu'elle représente la même courbe que l'équation (3), on doit avoir

$$\varphi'(v) = \frac{1 - v^2}{(1 + v^2)^2};$$

d'où

$$\varphi(v) = \int \frac{1 - v^2}{(1 + v^2)^2}\,dv = \frac{v}{1 + v^2},$$

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xy}{v^2 + y^2},$$

et l'équation du conoïde droit sera

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = C\,\frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Digitized by Google

Question 1631.

(Voir *Mathesis*, (3), VII, p. 200).

La tangente et la normale en un point M *d'une courbe* (C) *coupent les axes en* T, T', N, N'. *Déterminer* (C) *par la condition* $OT = ON' . \varphi(\overline{OM}^2)$.

(J. Rose.)

Solution par MM. Abramescu, Dupont, Lez, Van Dinter et Verheugen: Des valeurs

$$OT = x - \frac{y}{y'}, \quad ON' = y + \frac{x}{y'},$$

on déduit l'équation différentielle

$$x - \frac{y}{y'} = \left(y + \frac{x}{y'}\right)\varphi(x^2 + y^2),$$

ou
$$x\,dy - y\,dx = (x\,dx + y\,dy)\,\varphi(x^2 + y^2).$$

Passant aux coordonnées polaires, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on trouve

$$x\,dy - y\,dx = r^2 d\theta, \quad x\,dx + y\,dy = r\,dr, \quad d\theta = \frac{\varphi(r^2)}{r}\,dr,$$

intégrant, on obtient pour l'équation des courbes (C);

$$\theta = \theta_0 + \int \frac{\varphi(r^2)}{r}\,dr, \quad \theta = \theta_0 + \int \frac{\varphi(r^2)}{2r^2}\,d(r^2).$$

Un anonyme nous a adressé la même solution, avec la remarque qu'on obtient une lemniscate en posant $\varphi(r^2) = \dfrac{r^2}{a\sqrt{a^2 - r^2}}$.

×Question 1632.

(Voir *Mathesis*, (3). VII, p. 200).

Dans un triangle ABC ($a > b > c$), *si les droites qui joignent le centre de gravité aux milieux des hauteurs font avec les côtés opposés des angles aigus* α, β, γ, *on a la relation :* $\cot\beta = \cot\alpha + \cot\gamma$.

(E. N. Barisien)

Pour abréger, nous unifions les notations.

Solution par M. H. Lez. Soit ABC le triangle satisfaisant aux conditions de l'énoncé; désignons par D, E, F les milieux des côtés, par I le

Digitized by Google

milieu de la hauteur AH, par K le point de rencontre de la droite IG avec BC.

On a

$$BH = 2FI = KC, \quad HK = HC - BH.$$

Or, le triangle rectangle IHK donne $HK = HI \cot \alpha$, mais $HI = \frac{h_a}{2}$ $HC = h_a \cot C$, $HB = h_a \cot B$; par suite,

$$\cot \alpha = h_a (\cot C - \cot B) \frac{2}{h_a} = (\cot C - \cot B),$$

De même, $\cot \beta = 2(\cot C - \cot A)$, $\cot \gamma = 2(\cot B - \cot A)$.

Ces trois équations permettent d'écrire $\cot \beta = \cot \alpha + \cot \gamma$.

Solution analogue par M. Baidaf (Jassy).

Solution par MM. Verheugen, Agronomof, Van Dinter *et* Plakhovo. G étant le centre de similitude des deux triangles ABC, DEF, on a $KC = 2FI = BH$, $HD = DK$. On sait que $HD = \frac{b^2 - c^2}{2a}$. Or, le triangle rectangle IHK donne

$$\cot \alpha = \frac{HK}{HI} = \frac{b^2 - c^2}{a h_a} = \frac{b^2 - c^2}{T}.$$

Par analogie, en tenant compte de l'hypothèse $a > b > c$, on peut écrire

$$\cot \beta = \frac{a^2 - c^2}{T}, \quad \cot \gamma = \frac{a^2 - b^2}{T},$$

d'où l'on conclut la relation proposée.

Autres solutions, moins simples, par MM. Delahaye et Abramescu,

Généralisation par MM. Hacken *et* Constantinescu. Au lieu des milieux des hauteurs on peut prendre trois points qui divisent les hauteurs dans un même rapport. Soit donc I le point de AH tel que $AI : IH = m : n$, et soit encore K le point de rencontre des droites IG, BC. Le triangle AHA coupé par la transversale IK donne

$$\frac{AI}{IH} \cdot \frac{HK}{DK} \cdot \frac{DG}{GA} = 1, \quad \text{d'où} \quad HK = \frac{2n}{2n - m} HD.$$

Par conséquent,

$$\cot \alpha = \frac{HK}{HI} = \frac{2n}{2n - m} HD : \frac{n}{m + n} h_a = \frac{2(m + n)}{2n - m} \cdot \frac{HO}{h_a}$$

$$= \frac{m + n}{2n - m} (\cot C - \cot B) = \frac{m + n}{2n - m} \cdot \frac{b^2 - c^2}{T};$$

d'où l'on déduit encore $\cot \beta = \cot \alpha + \cot \gamma$.

Digitized by Google

REMARQUE. Si l'on remplace encore G par le point qui a pour coordonnées barycentriques λ, μ, ν, on a

$$\cot\alpha = \frac{n(\mu+\nu)-m\lambda}{m-n}(\nu\cot C - \mu\cot B). \qquad \text{(HACKEN)}$$

Question 1686.

(Voir *Mathesis*, VII, (3), p. 232).

Un cylindre droit à base circulaire est inscrit dans un prisme droit de base carrée et de même hauteur qu'il touche suivant quatre droites parallèles à ses arêtes. Par l'un des côtés du carré, base supérieure du prisme, et par le diamètre parallèle de la base inférieure du cylindre, on mène un plan sécant. Le volume de l'onglet cylindrique compris entre le plan sécant, la base inférieure du cylindre et le cylindre est le sixième du volume du prisme. (ARCHIMÈDE.)

Solution par M. G. VERHEUGEN. Appelons AB le diamètre et P le plan incliné, dont il est question dans l'énoncé; soit $AB = 2R$ et h la hauteur du cylindre et du prisme. Partageons l'onglet cylindrique en deux parties égales par un plan Q, mené perpendiculairement à AB par son milieu O. Nous avons ainsi un volume limité par les plans P et Q, la base inférieure et le cylindre.

Partageons le rayon OA en n parties égales et menons des plans parallèles au plan Q par chacun des points de subdivision. Chacun de ces plans coupera l'onglet suivant un triangle rectangle; tous ces triangles rectangles seront semblables puisqu'ils ont tous comme angle aigu, l'angle rectiligne du dièdre de P avec la base inférieure. Leurs surfaces seront donc proportionnelles aux carrés des côtés homologues; or, ces côtés homologues sont les demi cordes de la base inférieure menées perpendiculairement sur AB par les points de subdivision de OA. Soit k la distance entre deux points de subdivision, de sorte que $kn = R$, alors les carrés des côtés homologues seront respectivement

$$R^2,\quad R^2-k^2,\quad R^2-(2k)^2,\quad \ldots,\quad R^2-[(n-1)k]^2.$$

La surface du triangle ayant R comme côté est $\frac{Rh}{2}$, donc en vertu de ce qui précède les différentes sections auront comme surfaces :

Digitized by Google

$$\frac{Rh}{2},\quad \frac{R^2-k^2}{2R}\times h,\quad \frac{R^2-(2k)^2}{2R}\times h,\quad \ldots,\quad \frac{R^2-[(n-1)k]^2}{2R}\times h.$$

Cela étant, désignons par V le volume du demi-onglet; construisons des prismes droits, tous de hauteur k, dont les bases inférieures soient respectivement la 1re, la 2de, la 3e, ..., la n^{me} section, désignons par M la somme de ces n prismes; construisons des prismes droits, tous de hauteur k, dont les bases supérieures soient respectivement la 2e, la 3e, ..., la n^e section; désignons par m la somme de ces $(n-1)$ prismes.

On aura évidemment

$$M > V > m.$$

Puisque les prismes ont pour hauteur k, on a

$$M = \frac{Rh}{2}\times k + \frac{R^2-k^2}{2R}\times hk + \frac{R^2-(2k)^2}{2R}\times hk + \cdots \frac{R^2-[(n-1)k]^2}{2R}\times hk,$$

d'où

$$M = \frac{hk}{2R}\left\{nR^2 - k^2[1+2^2+2^3+\cdots(n-1)^2]\right\}$$

$$M = \frac{hk}{2R}\left[nR^2 - \frac{k^2 n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$$

$$M = \frac{h}{2R}\left[knR^2 - \frac{kn(kn-k)(2kn-k)}{6}\right].$$

Or,

$$kn = R,$$

donc

$$M = \frac{h}{2R}\left[R^3 - \frac{R(R-k)(2R-k)}{6}\right] = \frac{h}{12}[6R^2 - (R-k)(2R-k)].$$

Augmentons le nombre de subdivisions indéfiniment, alors

$$\lim k = 0,$$

et

$$\lim M = \frac{h}{12}(6R^2 - 2R^2) = \frac{hR^2}{3}.$$

On prouve de même que $\lim m = \frac{hR^2}{3}$; d'ailleurs $M - m$ vaut le volume d'un prisme de base $\frac{Rh}{2}$ et de hauteur k; donc

$$M - m = \frac{2Rhk}{2} \quad \text{et} \quad \lim(M-m) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim M = \lim m.$$

Digitized by Google

Or, $M > V > m$; donc $\lim M \geq V \geq \lim m$

d'où $V = \frac{1}{3} hR^2$;

l'onglet vaut donc $\frac{2}{3} hR^2$, c'est-à-dire le sixième de $4R^2h$, volume du prisme de base $4R^2$ et de hauteur h.

Remarque. Par le calcul intégral, on a

Surface d'une section à la distance x, $\frac{(R^2 - x^2)h}{2R}$;

donc $$V = \int_0^R \frac{(R^2 - x^2)h}{2R} dx = \left[\frac{Rhx}{2} - \frac{hx^3}{6R}\right]_0^R = \frac{1}{3} R^2 h.$$

Solution par M. H. Lez. L'onglet cylindrique peut se décomposer en une suite de pyramides ayant pour sommet commun le point O et dont la somme des bases forme la surface circulaire de cet onglet. Si S est cette surface, la volume sera $V = \frac{1}{3} SR$; mais on sait que cette surface est équivalente au rectangle $2hR$, construit sur le diamètre 2R et la hauteur h, d'où

$$V = \frac{2hR^2}{3}.$$

Le prisme à base carrée, circonscrit au cylindre, ayant pour volume : $V' = 4hR^2$, on a évidemment $V = \frac{1}{6} V'$.

M. Lez démontre aussi le théorème par le calcul intégral.

Remarque. Le théorème invoqué par M. Lez dans sa démonstration repose sur la remarque suivante : Considérons 1° une facette trapézoïdale MNN'M' inscrite dans la surface cylindrique de manière que MM', NN' soient deux génératrices du cylindre, MN un arc de la circonférence de base du cylindre; 2° la portion du rectangle $2hR$ ayant pour hauteur h et pour base mn, projection de MN sur ABφ. On trouve assez aisément que

$$\lim \frac{MNN'M'}{mn \times h} = 1,$$

quand MN tend vers zéro, parce que

$$\lim \frac{MN}{mn} = \lim \frac{h}{MM'}. \qquad \text{(P. M.)}$$

Solution par F. G.-M. 1° Soient h la hauteur, R le rayon du cylindre, G le centre de gravité du demi-cercle de l'onglet.

Digitized by Google

Le volume d'un tronc cylindrique s'obtient en multiplant la section droite par la parallèle menée par G, aux génératrices du cylindre ; or la distance de G au centre O du demi-cercle est donnée par

$$OG = \frac{4R}{3\pi},$$

d'où la parallèle menée par G ou $GG' = \frac{4h}{3\pi}$,

$$V = \frac{\pi R^2}{2} \cdot \frac{4h}{3\pi} \quad \text{ou} \quad V = \frac{4R^2 h}{6};$$

ainsi l'onglet est le sixième du prisme circonscrit $4\,R^2h$.

2° On pourrait traiter la question par la *méthode des sections comparées* qu'on emploie en second lieu pour la question 1637.

3° La *méthode de sommation* est d'un emploi facile pour traiter la question proposée.

Solution par M. Baidaf (Jassy). M. Baidaf inscrit dans la moitié de l'onglet cylindre, un onglet prismatique de base régulière de 2^{k-1} côtés. De proche en proche, on trouve pour son volume $\frac{1}{6}hR^2\left(1+\cos\frac{\pi}{2^{k-1}}\right)$, et à la limite, pour la moitié de l'onglet, $\frac{1}{3}hR^2$; etc.

Question 1637.

(Voir *Mathesis*, VII, (3), p. 232.)

Le volume compris entre deux cylindres droits à base circulaire inscrits dans un cube qu'ils touchent chacun suivant quatre droites parallèles aux arêtes, les axes des deux cylindres étant perpendiculaires, est égal aux deux tiers du volume du cube. (ARCHIMÈDE)

Solution par M. G. VERHEUGEN. Le plan des axes, P, est un plan de symétrie. Soit O le centre du cube, A le centre d'une face du cube, OA étant perpendiculaire sur P.

Divisons OA en n parties égales et soit k la distance entre deux points de subdivision, de sorte que $nk = R$, $2R$ étant le côté du cube. Menons par chacun des points de subdivisions des plans parallèles à P ; ces plans vont couper les bases des cylindres suivant des cordes, qui seront égales comme étant équidistantes du diamètre ; il en résulte que les plans déterminent dans le volume considéré des carrés dont les surfaces sont respectivement :

$$4R^2 \qquad 4(R^2 - k^2) \qquad 4[R^2 - (2k)^2] \ldots\ldots 4\{R^2 - [(n-1)k]^2\}.$$

Digitized by Google

Construisons des prismes droits ayant tous comme hauteur k, le premier ayant comme base inférieure la première section, le deuxième, la deuxième section, etc., désignons par M la somme de ces n prismes.

Construisons des prismes droits, ayant tous comme hauteur k, le premier ayant comme base supérieure la deuxième section, le second la troisième section, etc., désignons par m la somme de ces $(n-1)$ prismes. Désignons par V la moitié du volume compris entre les cylindres. On a évidemment

$$M > V > m.$$

Puisque la hauteur commune des prismes est k, on a

$$M = 4k\{R^2 + (R^2 - k^2) + [R^2 - (2k)^2] + \cdots + R^2 - [(n-1)k]^2\},$$

$$M = 4k\{nR^2 - k^2[1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2]\},$$

$$M = 4\left[knR^2 - \frac{k^3 n(n-1)(2n-1)}{6}\right] = 4\left[knR^2 - \frac{kn(kn-k)(2kn-k)}{6}\right].$$

Or, $kn = R$, donc

$$M = 4\left[R^3 - \frac{R(R-k)(2R-k)}{6}\right].$$

En augmentant le nombre de subdivisions indéfiniment,

$$\lim k = 0 \quad \text{et} \quad \lim M = 4\left(R^3 - \frac{2R^3}{6}\right) = \frac{8R^3}{3}.$$

On prouve de même que $\lim m = \frac{8R^3}{3}$; d'ailleurs $M - m$ vaut un prisme droit de base $4R^2$ et de hauteur k, donc $M - m = 4R^2 k$, d'où $\lim(M - m) = 0$, $\lim M = \lim m$. Cela étant, on a

$$M > V > m,$$

$$\lim M \geq V \geq \lim m,$$

d'où

$$V = \frac{8R^3}{3}.$$

Le volume compris entre les deux cylindres sera donc $2V = \frac{16R^3}{3}$, c'est-à-dire les deux tiers de $8R^3$, volume du cube.

Remarque. Par le calcul intégral on a pour la surface d'une section à distance x du plan P, $4(R^2 - x^2)$; donc

$$V = 4\int_0^R (R^2 - x^2)\,dx = 4\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{8R^3}{3}.$$

Digitized by Google

Solution par M. F. G.-M. 1° Le plan mené par les axes des deux cylindres coupe le solide commun aux cylindres suivant un carré; les deux plans menés par chaque diagonale de ce carré et deux arêtes du cube, divise le solide en quatre onglets cylindriques; chacun d'eux est équivalent à l'onglet de la question 1636, donc

$$V = \frac{4d^3}{6} \quad \text{ou} \quad V = \frac{2d^3}{3},$$

d étant le diamètre du cercle inscrit dans le carré.

2° Lorsque tout plan parallèle à un plan donné, coupe deux solides donnés suivant des sections qui sont entre elles dans un rapport constant, les volumes de ces solides sont entre eux dans ce même rapport.

Or, la sphère inscrite dans le solide commun aux deux cylindres, et ce même solide, sont coupés par tout plan parallèle au carré du plan des deux axes, suivant un cercle inscrit au carré correspondant; par suite les volumes de la sphère et du solide étudié sont dans le rapport d'un cercle au carré circonscrit, donc

$$V = \frac{16R^3}{3} \quad \text{ou} \quad V = \frac{2}{3}d^3.$$

Remarques. 3° La moitié de la surface du solide commun, au-dessus du carré est une *voûte en arc de cloître* à base carrée; le volume compris entre cette voûte et le carré de base, s'obtient en multipliant cette base d^2 par les $\frac{2}{3}$ de la hauteur $\frac{1}{2}d$. Il en est de même pour toutes les voûtes en arc de cloître quel que soit le polygone de base et la hauteur, lorsque la courbe directrice est une moitié d'ellipse.

4° Le théorème 1637 peut recevoir une autre généralisation: Dans chaque face d'un parallélipède quelconque, on inscrit une ellipse tangente aux côtés du parallélogramme, au milieu même de ces côtés; ces ellipses, égales deux à deux, servent de directrices aux génératrices d'un cylindre, les trois solides différents qu'on obtient en considérant ces cylindres deux à deux, sont équivalents entre eux; chacun d'eux est les $\frac{2}{3}$ du parallèlipipède.

5° Les questions précédentes, et d'autres analogues se trouvent dans l'*Appendice aux Exercices de Géométrie* par F. I. C, édités par MM. Mame et Poussielgue (Voir n^{os} 767, 857, 870).

Digitized by Google

M. Lez a aussi résolu la question 1637, en décomposant le volume considéré en huit onglets cylindriques du genre de ceux dont le volume a été trouvé dans la question 1636; puis, par le calcul intégral. Il remarque que des questions plus générales que celles d'Archimède sont traitées dans Frenet, *Recueil d'exercices de calcul infinitésimal* (3e édition, nos 459-464 du calcul intégral). M. Baidaf décompose aussi le volume à trouver en huit onglets cylindriques.

Note. Le principe invoqué dans la seconde solution de F. G.-M. est celui de la *méthode des indivisibles* de Cavalieri que Grégoire de Saint Vincent a démontré avec rigueur. On le trouve, avec la méthode de sommation d'Archimède (employée par M. Verheugen dans la solution des questions 1636, 1637), dans l'excellent *Appendice* cité plus haut. Ce petit ouvrage est malheureusement épuisé. (P. M.)

QUESTIONS D'EXAMEN.

1370. Les diagonales d'un quadrilatère ABCD se coupent en O. Si l'on a $BO = OD$ et $AB + BC = AD + DC$, la figure est un parallélogramme. (Sanjuna)

Cela revient à dire que les triangles ABC, CDA sont égaux comme ayant même base AC, les hauteurs correspondantes égales et même somme des autres côtés.

1371. Si un trinôme du second degré en x, à coefficients entiers, prend des valeurs numériques impaires successivement pour $x = 0$ et $x = 1$, les racines de ce trinôme ne peuvent être entières. (A. Dalle)

Soit : $f(x) \equiv ax^2 + bx + c$; si α était une racine entière, on aurait :

$$f(x) \equiv (x - \alpha)\, f_1(x).$$

Or, si l'on fait dans cette identité, $x = 0$ ou 1, on remarque que, quelle que soit la parité de α, l'égalité ne peut avoir lieu.

1372. Mettre l'expression $4[a^4 + b^4 - ab(a^2 + b^2)]$ sous la forme $A^2 + 3B^2$.

On ramène l'expression proposée à $(a - b)^2 [4a^2 + 4ab + 4b^2]$ et le dernier facteur à $(a + 2b)^2 + 3a^2$, ou $(2a + b)^2 + 3b^2$, ou $(a - b)^2 + 3(a + b)^2$.

On peut de même mettre sous la forme $A^2 + 3B^2$ les expressions

$$16\left[\frac{a^7 + b^7 - ab(a^5 + b^5)}{a + b}\right], \quad 16\left[a^6 + b^6 - 2ab\,\frac{a^5 + b^5}{a + b}\right].$$

(G. Candido)

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

1651. On considère le symbole

$$0{,}123456789101112\ldots$$

où la partie décimale est obtenue en écrivant, sans séparation, la suite naturelle des nombres.

Peut-on indiquer, sous forme finie, la limite du nombre décimal illimité correspondant?

1652. Étant donnés deux triangles homologiques $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, on prend $A_1A_2A_3$ pour triangle de référence et le centre d'homologie pour point unitaire, de manière que les coordonnées des points B_1, B_2, B_3 sont $(\alpha_1, 1, 1)$, $(1, \alpha_2, 1)$, $(1, 1, \alpha_3)$. Trouver 1° l'équation de la conique par rapport à laquelle les deux triangles sont polaires réciproques; 2° celle de la conique qui passe par les points d'intersection des côtés non homologues; 3° celle de la conique qui touche les droites joignant deux sommets non homologues. (J. NEUBERG)

1653. Etant donnée une conique à centre, trouver le lieu des points tels que les tangentes issues de ces points coupent les axes en quatre points d'une circonférence. Quel est le lieu du centre de cette circonférence quand le point mobile décrit son lieu. (ROSE)

1654. Une tangente en P à l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

en Q à l'hyperbole

$$x^2 - y^2 + a^2 - b^2 = 0,$$

rencontre le petit axe de l'ellipse en T. Démontrer que (TQ : TP) est égal au carré de l'excentricité de l'ellipse. (E. N. BARISIEN)

La même propriété subsiste si P et Q sont, par rapport aux deux coniques les pôles d'une droite quelconque.

×**1655** On divise les angles intérieurs d'un triangle ABC, en trois parties égales. Soit A′ le point de rencontre des trisectrices des angles B, C les plus rapprochés du côté BC. Si B′ C′ ont des significations analogues, démontrer que le triangle A′B′C′ est équilatéral.

En considérant en même temps les trisectrices des angles extérieurs du triangle ABC, peut-on obtenir d'autres triangles équilatéraux par la combinaison convenable des trisectrices extérieures ou intérieures ?

(EBDEN)

Digitized by Google

EN VENTE CHEZ LES MÊMES LIBRAIRES

Ch. Henry. La loi des petits nombres. Paris, Laboratoire d'énergétique, 13 ou 15, rue des Minimes (In-8° de XVII-72 pp). . . . . fr. 4.00

H. Schuermans. Développement d'une puissance quelconque d'un polynome. Gand, Vanderpoorten. 1908. (In folio de 81 pp.) . . . . . .

H. Grassmanns gesammelte Werke. II. Band. I. Theil. Die Abhandlungen zur Geometrie and Analysis, LT, 1904 (In-8° de X 452 pp.) . . marcs 16 00

P. Barbarin. La Géométrie non euclidienne. PGV, 1907 (In-12 cartonné de 91 pp. Collection *scientia*) . . . . . fr. 2 00

C. Bourlet. Cours abrégé de Géométrie. I. Géométrie plane. Paris, Hachette et Cie, 1906 (In-12 cartonné de VII-404 pp.) . . . . . fr. 2 50

P. Baudoin. Cahiers de dessins géométriques d'après le cours de M. Bourlet. Paris, Hachette et Cie, 1907 (Oblongs in-4° de 59 feuillets). fr. 1 50 + 2 00

J. Vandervennet. Proefneming van nieuwe beginsels der vlakke meetkunde. Gent, Siffer, 1907 (In-8° de 155 pp.). . . . . fr. 1 75

F. G.-M. Exercices de Géométrie. Quatrième édition. Tours, Mame et Fils; Paris, Vve Poussielgue, 1907 (In 8°, cartonné de XXI-1228 pp avec 1519 fig. dans le texte) . . . . . .

H. Weber und J. Wellstein. Encyklopädie der Elementar-Mathematik. III. Angewandte Elementar-Mathematik. LT, 1905, 1907 (cartonné in-8° de XII-604 et XVI-666 pp.) . . . . . marcs 14 00

M. Fr. Daniels. Essai de Géométrie sphérique en coordonnées projectives. Fribourg (Suisse), O. Gschwend, 1907 (Gr. in-8° de XII-280 pp. avec 44 fig.).

E. Jahnke Vorlesungen über die Vectorenrechnung. LT, 1905 (In 8° cartonné de XII-234 pp., 32 fig. dans le texte) . . . . . marcs 5 60

M. d'Ocagne. Calcul graphique et Nomographie. Paris, Doin (In-12 cartonné de XXVI 392 pp.) . . . . . fr. 5 00

M. Stuyvaert. Cinq études de géométrie analytique. Gand, E. Van Goethem. 1908 (VI-230 pp. in-8°) . . . . . fr. 6.00

G. Loria Vorlesungen über darstellende Geometrie. Deutsche Ausgabe von **Fr. Schütte.** I. Die Darstellungsmethoden. LT, 1907 (In-8° cartonné de XI-219 pp.) . . . . . marcs 6 80

Léon Lecornu. Dynamique appliquée. Paris, Doin (Cartonné de 531 pp. in-12) fr. 5.00

H. Schoentjes. Quelques leçons de thermodynamique. Gand, Vanderpoorten, 1907 (In-12 cartonné de 112 pp. avec 21 fig. dans le texte). . . . fr. 3 50

Avis aux auteurs de questions résolues.

Prière instante aux auteurs de questions résolues de les envoyer à la Rédaction de *Mathesis* sous une forme qui permette de les livrer à l'impression sans leur faire subir des retouches. Pour cela : 1° Ecrire sur une première ligne le mot *question* et le n° de la question précédés ou non de la croix, et soulignés par une ligne ondulée. 2° Ecrire sur une seconde ligne, avec la parenthèse habituelle, Mathesis, *sans accent*, ce mot étant souligné, avec l'indication de l'endroit où la question a été posée. 3° Transcrire l'énoncé de la question, souligné en entier. 4° Mettre au bout le nom de l'auteur de la question souligné *deux* fois, entre parenthèses. 5° Commencer les premières lignes de la solution, par les mots : *Solution par* soulignés une fois, suivi du nom de l'auteur souligné *deux* fois. 6° Continuer, sans aller à la ligne 7° Dans le texte de la solution, aller à la ligne chaque fois que l'on doit écrire une égalité ou une équation qui n'est pas très courte. 8° Ecrire $\frac{1}{2}a$ plutôt que $\frac{a}{2}$; $(n-p)$ plutôt que $\overline{n-p}$: *angle* ABC plutôt que $\widehat{ABC}$, $\sqrt{a}$ plutôt que $\sqrt{\ a}$. 9° Observer les règles de la ponctuation *française*, et non celles de la ponctuation *belge*. 10° Laisser une marge.

Prière à nos correspondants de joindre leur adresse PRÉCISE à CHACUN de leurs envois, au bas de leur article.

Digitized by Google

SOMMAIRE.

	Pages
Sur le cercle des neuf points, par M. W. Gallatly	33
Bibliographie	37
Notes mathématiques.	39
Solutions de questions proposées (1627, 1635, 1638 et 1639)	40
Question d'examen (1373 à 1379)	47
Questions proposées (1656 à 1660)	48
Supplément par M. E. Gelin	1-16

Les articles marqués d'une croix peuvent être compris. les questions marquées d'une croix peuvent être résolues, au moyen des mathématiques élémentaires.

Les articles destinés à *Mathesis* doivent être adressés *franco de port*, à M. P. MANSION, quai des Dominicains, 6, Gand, ou à M. J. NEUBERG, rue de Sclessin, 6, Liége.

Ils doivent être écrits lisiblement et sur un seul côté de la feuille. Une même feuille doit contenir un seul article ou une seule question résolue, **précédée de l'énoncé de la question**. Les auteurs de notes *exigeant des figures* sont priés de *dessiner celle-ci, avec soin, dans le format du journal, sur des feuilles séparées*. Les auteurs de *Questions à résoudre* sont priés de donner, avec les énoncés, *un aperçu des solutions*.

La Rédaction ne renvoie pas les manuscrits non insérés.

Les auteurs d'articles insérés dans *Mathesis*, qui en avertissent la **Rédaction** à temps, *en donnant leur adresse*, peuvent obtenir des tirages à part moyennant 5 francs, par feuille ou fraction de feuille, pour 100 exemplaires, 3 francs pour 50 exemplaires, 2 francs pour 30 exemplaires, frais de remaniement non compris.

Les ouvrages de mathématiques dont on enverra un ou deux exemplaires à M. P. MANSION, seront annoncés ou analysés dans le journal. Prière d'en d'indiquer le prix.

Mathesis paraît, en général, vers le 15 de chaque mois, par livraisons de 24 pages, qui peuvent être accompagnées de suppléments. Prix de l'abonnement annuel (**payable par anticipation**) :

Pour la Belgique	fr.	**7 50**
Pour l'Etranger.	»	**9 00**

On s'abonne chez M. AD. HOSTE, rue des Champs, 47, Gand (par un mandat postal, p. ex.) et chez M. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris.

Les réclamations, changements d'adresse, etc.. doivent être adressés, NON aux rédacteurs, mais à M. HOSTE.

Les nouveaux abonnés de *Mathesis* qui en feront la demande à M. MANSION, *en donnant leur adresse exacte*, recevront gratuitement les articles intitulés : 1° *Les premiers principes de la géométrie*, par M. DE TILLY ; 2° *Un autre mémoire* ; 3° *Sur la méthode analytique des anciens*, par M. P. MANSION ; 4° *Questions d'admission à l'Ecole militaire de Bruxelles* (1904) (ensemble 47 pages), ou d'autres Mémoires équivalents

Digitized by Google

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Professeur ordinaire à l'Université de Gand, | Professeur ordinaire à l'Université de Liége
Anciens élèves de l'École normale des sciences,
Membres de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis
PH. BRET

TROISIÈME SÉRIE.

TOME VIII — MARS 1908.

(TOME XXVIII DE LA COLLECTION).

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
21-23, RUE DU CALVAIRE, 21-23

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1908

Digitized by Google

EN VENTE CHEZ M. GAUTHIER-VILLARS A PARIS ET M. HOSTE A GAND.

Mathesis. Tome I (280 pages), 1881. II (272 p.). 1882. III (292 p.), 1883. IV (324 p.), 1884. V (432 p.), 1885. VI (368 p.), 1886. (Rares), VII (408 p.), 1887. VIII (358 p.), 1888. IX (344 p.), 1889. X (312 p.), 1890. XI (347 p.), 1891. XII (366 p.), 1892. XIII (381 p.), 1893. XIV (295 p.). 1894. XV (364 p.), 1895. XVI (396 p.), 1899. XVII (336 p.), 1897. XVIII (348 p.), 1898. XIX (312 p.), 1899. XX (318 p.), 1900. XXI (343 p.), 1901. XXII (334 p.), 1902. XXIII (312 p.), 1903. XXIV (384 p.), 1904. XXV (346 p.), 1905. XXVI (384 p.), 1906. XXVII (344 p.) 1907. Gr. in-8°. Gand, fr. 7 50; à Paris, fr. 9 00.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par Liouville (1836), continué (1875) par H. Resal, publié, depuis 1885, en livraisons trimestrielles, par C. Jordan. Prix de l'abonnement, *pris à Paris*, 30 fr.; union postale 35 00

PGV = PARIS, GAUTHIER-VILLARS LT = LEIPZIG, B. G. TEUBNER.

Hermite. Œuvres. Tome II, PGV, 1908 (In de VI-520 pp. avec portrait). fr. 18 00

J. J. Sylvester. The Collected Mathematical Papers. Volume II. Cambridge, at the University Press, 1903 (Cartonné in 4° de XVI-731 pp. avec 2 pl.) Sh. 18

Z. de Galdeano 1. Consideraciones sobre Filosofia y enseñanza de la Matemática, 1907 (In-8° de 115 pp.). 2. Exposición sumaria de las teorias matematicas, 1907 (In-8° de 208 pp.) . . . . . Pesetas 2.00 + 4.00

P. Worms de Romilly. Sur les premiers principes des sciences mathématiques. Paris, Hermann, 1908 (In-8° de 51 pp.) . . . . . fr. 2.50

G. Fazzari. Breve Storia delle Matematica. Dai tempi antichi al Medio Evo. Milano, Palermo, Napoli, R Sandron. [1907] (In-12 de 267 pp.). Lire 4 00

M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Vierter Band. LT, 1908 (grand in 8 de VI-1114 pp.) . . . . . marcs 32 00

R. Bonola. Die nichteuclidische Geometrie. Deutsche Ausgabe von H. Liebmann. LT, 1908 (Cartonné in 12 de VIII-246 pp) . . . marcs 5 00

F. Rudio. Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. LT, 1907 (In 18, cartonné de X-184 pp.). marcs 4 80

Joannis Verneri de triangulis sphæricis libri quatuor, herausgegeben von A. A. Björnbo. LT, 1907 (In 8° de XVI-184 pp.). . . . . marcs 8 00

Schwering. Handbuch der Elementar-Mathematik für Lehrer. LT, 1907 (In-8° cartonné de VIII-408 pp. avec 193 fig. dans le texte) . . . . marcs 8 00

F. Sommer. Vorlesungen über Zahlentheorie. LT, 1907 (In-8, cartonné de VI-361 pp.) . . . . . marcs 11 00

H. Dumont. Cours de Trigonométrie à l'usage des candidats aux Écoles spéciales. Bruxelles, chez l'auteur, rue Verte, 152 (In-8° de XIV-288 pp.; 4 planches) . . . . . fr. 6 00

E. Czuber. Vorlesungen über Differential- und Integral-Rechnung, Zweite Auflage. LT, 1906 (Deux vol. in-8°, cartonnés de XIV-560 et VIII-532 pp). marcs 24 00

Durège u. Maurer. Theorie der elliptischen Functionen. 5te Auflage. LT, 1908 (In-8, cartonné de VIII-436 pp) . . . . . marcs 11 00

W. Scheibner. Berträge zur Theorie der linearen Transformationen. LT, 1907 (In-8 de 250 pp.) . . . . . marcs 10 00

R. de Montessus. Leçons élémentaires sur le Calcul des Probabilités. PGV 1908 (In-8, de VI-191 pp.). . . . . fr. 7 00

A. Crefcœur. Cours d'analyse. Troisième partie. Calcul des probabilités. Anvers, De Vlijt, 1905 (116 pp. in-8°) . . . . . fr. 4 00

L. Krüger. Bedingungsgleichungen für Liniennetze und für Rückwärtseinschnitte. LT, 1908 (In-4 de IV-50 pp.)

Digitized by Google

×NOTE SUR LES TRIANGLES;

par M. CONSTANTINESCU.

I.

Le théorème suivant généralise un peu un théorème de M. Neuberg (Voir *Mathesis*, (3) VII, p. 92) :

I. *Soient deux triangles* ABC, A'B'C'. *On prend un point quelconque* O *dans le plan de ces deux triangles*.

Soient A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1, *les points d'intersection :* (OA', BC), (OB', CA), (OC', AB), (OA, B'C'), (OB, C'A'), (OC, A'B').

Si les points A_1, B_1, C_1 *sont collinéaires, les points* A'_1, B'_1, C'_1 *le sont également; si les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *sont concourantes, il en est de même des droites* $A'A'_1$, $B'B'_1$, $C'C'_1$ (*).

J'en donnerai une démonstration analogue à celle de M. Tummers. On a en désignant par (X, d) la distance du point X à la droite d :

$$\frac{A'_1B'}{A'_1C'} = \frac{\text{aire } OA'_1B'}{\text{aire } OA'_1C'} = \frac{OB'}{OC'}\cdot\frac{(A'_1,OB_1)}{(A'_1,OC_1)} = \frac{OB'}{OC'}\cdot\frac{(A,OB_1)}{(A,OC_1)} = \frac{OB'}{OC'}\cdot\frac{OC_1}{OB_1}\cdot\frac{\text{aire } OAB_1}{\text{aire } OAC_1}$$

$$= \frac{OB'}{OC'}\cdot\frac{OC_1}{OB_1}\cdot\frac{AB_1}{AC_1}\cdot\frac{(O,b)}{(O,c)}, \qquad \frac{B'_1C'}{B'_1A'} = \frac{OC'}{OA'}\cdot\frac{OA_1}{OC_1}\cdot\frac{BC_1}{BA_1}\cdot\frac{(O,c)}{(O,a)}$$

$$\frac{C'_1A'}{C'_1B'} = \frac{OA'}{OB'}\cdot\frac{OB_1}{OA_1}\cdot\frac{CA_1}{CB_1}\cdot\frac{(O,a)}{(O,b)}.$$

En multipliant membre à membre ces égalités, on obtient une relation qui peut se mettre sous la forme :

$$\left(\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}\right)\left(\frac{A'_1B'}{A'_1C'}\cdot\frac{B'_1C'}{B'_1A'}\cdot\frac{C'_1A'}{C'_1B'}\right) = 1.$$

Cette égalité rend le théorème évident.

II. En transformant par polaires réciproques on obtient le théoréme suivant :

Une transversale rencontre les côtés de deux triangles ABC, A'B'C' *en* A_1, B_1, C_1; A'_1, B'_1, C'_1 : *Si les droites* AA'_1, BB'_1, CC'_1 *sont concourantes ou*

(*) Ce théorème est connu; le lieu du point O est une cubique, les droites $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$ enveloppent des courbes de troisième classe (Grassmann). Voir par exemple, *Mathesis*, 1902, p 153. Les droites OA et OA', OB et OB', OC et OC' forment trois couples en involution.

Digitized by Google

rencontrent les côtés du triangle ABC *en trois points collinéaires; les droites* $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ *sont également concourantes ou rencontrent les côtés du triangle* $A'B'C'$ *en trois points collinéaires.*

Ce théorème est déjà connu; voir, par exemple, l'article de M. Neuberg : « Involution et évolution » (*Mathesis*, (3) VII, p. 66).

En voici une démonstration élémentaire, peut-être nouvelle.

Soient A_2, B_2, C_2 les points où les droites AA_1', BB_1', CC_1' rencontrent les côtés du triangle ABC, et A_2', B_2', C_2' ceux où les droites $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ rencontrent les côtés du triangle $A'B'C'$.

Les triangles A_1BC_1, A_1CB_1 coupés par la transversale AA_1' donnent :

$$\frac{A_2B}{A_2A_1}\cdot\frac{A_1'A_1}{A_1'C_1}\cdot\frac{AC_1}{AB}=1, \qquad \frac{A_2C}{A_2A_1}\cdot\frac{A_1'A_1}{A_1'B_1}\cdot\frac{AB_1}{AC_1}=1.$$

En divisant membre à membre ces deux égalités on a :

$$\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{A_1'B_1}{A_1'C_1}\cdot\frac{AC_1}{AB_1}\cdot\frac{AC}{AB}=1.$$

De même,

$$\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{B_1'C_1}{B_1'A_1}\cdot\frac{BA_1}{BC_1}\cdot\frac{BA}{BC}=1,$$

$$\frac{C_2A}{C_2B}\cdot\frac{C_1'A_1}{C_1'B_1}\cdot\frac{CB_1}{CA_1}\cdot\frac{CB}{CA}=1.$$

En multipliant membre à membre ces trois égalités, en observant que les points A_1, B_1, C_1 sont collinéaires, on obtient :

$$\left(\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}\right)\left(\frac{A_1'B_1}{A_1'C_1}\cdot\frac{B_1'C_1}{B_1'A_1}\cdot\frac{C_1'A_1}{C_1'B_1}\right)=-1.$$

Par analogie,

$$\left(\frac{A_2'B'}{A_2'C'}\cdot\frac{B_2'C'}{B_2'A'}\cdot\frac{C_2'A'}{C_2'B'}\right)\left(\frac{A_1B_1'}{A_1C_1'}\cdot\frac{B_1C_1'}{B_1A_1'}\cdot\frac{C_1A_1'}{C_1B_1'}\right)=-1.$$

En multipliant membre à membre cette relation avec la relation précédente, on obtient :

$$\left(\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}\right)\left(\frac{A_2'B'}{A_2'C'}\cdot\frac{B_2'C'}{B_2'A'}\cdot\frac{C_2'A'}{C_2'B'}\right)=1.$$

Cette relation démontre le théorème.

Digitized by Google

II.

Par les sommets d'un triangle ABC, *on mène les droites* AA″, BB″, CC″ *qui rencontrent les côtés opposés en* A″, B″, C″. *Ces droites forment un autre triangle* A′B′C′. *On a la relation :*

$$\frac{A''B}{A''C}\cdot\frac{B''C}{B''A}\cdot\frac{C''A}{C''B}=-\frac{AB'}{AC'}\cdot\frac{BC'}{BA'}\cdot\frac{CA'}{CB'}. \qquad (1)$$

En effet, les triangles BA′C, CB′A, AC′B coupés respectivement par les transversales A″B′C′, B″C′A′, C″A′B′ donnent :

$$\frac{A''B}{A''C}\cdot\frac{B'C}{B'A'}\cdot\frac{C'A'}{C'B}=1, \qquad \frac{B''C}{B''A}\cdot\frac{C'A}{C'B'}\cdot\frac{A'B'}{A'C}=1,$$

$$\frac{C''A}{C''B}\cdot\frac{A'B}{A'C'}\cdot\frac{B'C'}{B'A}=1.$$

En multipliant membre à membre ces trois égalités, on obtient facilement la relation (1).

La relation (1) est vraie aussi lorsque l'un des deux triangles ABC, A′B′C′ a une aire nulle, c'est à dire lorsque les points A, B, C sont collinéaires, ou que les droites AA″, BB″, CC″ concourent en un même point O. On retrouve alors les théorèmes de Ménélaüs ou de Céva.

III

Je reviens sur les théorèmes de la note 19 (*Mathesis*, (3), VII, p. 211) et je vais signaler d'autres théorèmes.

Sur les côtés d'un triangle ABC, prenons les trois couples de points (A_1, A_1'), (B_1, B_1'), (C_1, C_1').

I. *Si les droites joignant* C, A, B *respectivement aux points* (AA_1, BB_1'), (BB, CC_1'), (CC_1, AA_1') *coupent* AB, BC, CA en C_2, A_2, B_2, *on a*

$$\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1'A}{C_1'B}=-1, \qquad \frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{A_1'B}{A_1'C}=-1,$$

$$\frac{C_2A}{C_2B}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1'C}{B_1'A}=-1.$$

En multipliant ces égalités membre à membre, on obtient

$$\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=-\frac{AB_1\cdot AB_1'}{AC_1\cdot AC_1'}\cdot\frac{BC_1\cdot BC_1'}{BA_1\cdot BA_1'}\cdot\frac{CA_1\cdot CA_1'}{CB_1\cdot CB_1'}. \qquad (1)$$

Cette relation nous montre que si les points $A_1, A_1', B_1, B_1', C_1, C_1'$ sont

Digitized by Google

sur la même conique, le second membre de la relation (1) étant — 1 (*), les droites AA_2, BB_2, CC_2 sont concourantes; réciproquement si les droites AA_2, BB_2, CC_2 sont concourantes, les points A_1, A'_1, B_1, B'_1, C_1, C'_1 sont sur une même conique. Une propriété analogue s'applique aux droites CC'_2, AA'_2, BB'_2 joignant C, A, B aux points $(AA'_1.\ BB_1)$, $(BB'_1,\ CC_1)$, $(CC'_1,\ AA_1)$.

Ce théorème généralise les théorèmes 1 et 5 de la note 19.

Dans le cas où les droites AA'_1, BB'_1, CC'_1 sont les isotomiques ou les isogonales des droites AA_1, BB_1, CC_1, on voit facilement que les points A_1, A'_1, B_1, B'_1. C_1, C'_1 sont sur une même conique; car alors le second membre de la relation (1) devient — 1 (**) et l'on a les conclusions du premier théorème de la note 19 dans le cas plus général.

La relation (1) nous donne encore le théorème 6 de la note 19.

II. *Si* C_2, A_2, B_2 *sont les points* $(A_1B'_1,\ AB)$, $(B_1C'_1,\ BC)$, $(C_1A'_1,\ CA)$ *on a*

$$\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C'_1A}{C'_1B}=1,\qquad \frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}\cdot\frac{A'_1B}{A'_1C}=1,$$

$$\frac{C_2A}{C_2B}\cdot\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B'_1C}{B'_1A}=1.$$

D'où

$$\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=\frac{AB_1\cdot AB'_1}{AC_1\cdot AC'_1}\cdot\frac{BC_1\cdot BC'_1}{BA_1\cdot BA'_1}\cdot\frac{CA_1\cdot CA'_1}{CB_1\cdot CB'_1}. \qquad (2)$$

Cette relation montre que si les points A_1, A'_1, B_1, B'_1, C_1, C'_1 sont sur une même conique, les points A_2, B_2, C_2 sont collinéaires.

De même les points analogues A'_2. B'_2, C'_2 sont collinéaires.

Ce théorème généralise les théorèmes 2 et 4 de la note 19.

La relation (2) nous donne encore le théorème 3 de la même note.

Lorsque les points A'_1, B'_1, C'_1 sont les isotomiques des points A_1, B_1, C_1, on a la conclusion du théorème 2 de la note 19 dans le cas plus général.

(*) On a la relation de CARNOT.

(**) Lorsque AA_1, AA'_1 sont des isotomiques, on a $\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{A'_1B}{A'_1C}=1$ et lorsque AA_1, AA'_1, sont des isogonales, on a $\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{A'_1B}{A'_1C}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$, etc

Digitized by Google

III. *Soient* α, β, γ *les points d'intersection* (AA'_1, B_1C_1), (BB'_1, C_1A_1), (CC'_1, A_1B_1). *On a*

$$\frac{\alpha B_1}{\alpha C_1} = \frac{\text{aire } AB_1\alpha}{\text{aire } AC_1\alpha} = \frac{AB_1(\alpha, b)}{AC_1(\alpha, c)} = \frac{AB_1(A'_1, b)}{AC_1(A'_1, c)}$$

$$= \frac{AB_1}{AC_1} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\text{aire } ACA'_1}{\text{aire } ABA'_1} = \frac{AB_1}{AC_1} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{A'_1C}{A'_1B};$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\beta C_1}{\beta A_1} = \frac{BC_1}{BA_1} \cdot \frac{BC}{BA} \cdot \frac{B'_1A}{B'_1C}, \quad \frac{\gamma A_1}{\gamma B_1} = \frac{CA_1}{CB_1} \cdot \frac{CA}{CB} \cdot \frac{C'_1B}{C'_1A}.$$

En multipliant membre à membre ces égalités, et tenant compte des signes, on obtient une relation qui peut se mettre sous les formes :

$$\frac{\alpha B_1}{\alpha C_1} \cdot \frac{\beta C_1}{\beta A_1} \cdot \frac{\gamma A_1}{\gamma B_1} = -\frac{AB_1 \cdot AB'_1}{AC_1 \cdot AC'_1} \cdot \frac{BC_1 \cdot BC'_1}{BA_1 \cdot BA'_1} \cdot \frac{CA_1 \cdot CA'_1}{CB_1 \cdot CB'_1} \tag{3}$$

$$\frac{\alpha C_1}{\alpha B_1} \cdot \frac{\gamma B_1}{\gamma A_1} \cdot \frac{\beta A_1}{\beta C_1} = -\left(\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B}\right)\left(\frac{A'_1B}{A'_1C} \cdot \frac{B'_1C}{B'_1A} \cdot \frac{C'_1A}{C'_1B}\right) \tag{4}$$

La relation (3) montre que si les points A_1, A'_1, B_1, B'_1, C_1, C'_1 sont sur une même conique, les droites $A_1\alpha$, $B_1\beta$, $C_1\gamma$ sont concourantes.

Ce théorème généralise le théorème de M. Neuberg (*Mathesis*, (3), VII, p. 92).

La relation (4) montre que si les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont concourantes et si les points A'_1, B'_1, C'_1 sont collinéaires, les points α, β, γ sont aussi collinéaires; c'est le corrélatif du théorème de M. Neuberg.

IV. *Si* α, β, γ *sont les points d'intersection* $(B_1C_1, B'_1C'_1)$, $(C_1A_1, C'_1A'_1)$, (A_1B_1, A'_1B_1) *et si* A_2, B_2, C_2 *sont les points où les droites* $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ *rencontrent les côtés du triangle* ABC, *on tire de la relation* (4), *en remplaçant* A'_1, B'_1, C'_1 *par* A_2, B_2, C_2,

$$\frac{A_2C}{A_2B} \cdot \frac{C_2B}{C_2A} \cdot \frac{B_2A}{B_2C} = -\left(\frac{\alpha B_1}{\alpha C_1} \cdot \frac{\beta C_1}{\beta A_1} \cdot \frac{\gamma A_1}{\gamma B_1}\right)\left(\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B}\right) \tag{5}$$

Les triangles AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 coupés respectivement par les transversales $B'_1C'_1$, $C'_1A'_1$, $A'_1B'_1$ donnent

$$\frac{\alpha B_1}{\alpha C_1} \cdot \frac{C'_1C_1}{C'_1A} \cdot \frac{B'_1A}{B'_1B_1} = 1, \quad \frac{\beta C_1}{\beta A_1} \cdot \frac{A'_1A_1}{A'_1B} \cdot \frac{C'_1B}{C'_1C_1} = 1, \quad \frac{\gamma A_1}{\gamma B_1} \cdot \frac{B'_1B_1}{B'_1C} \cdot \frac{A'_1C}{A'_1A_1} = 1.$$

Digitized by Google

En multipliant membre à membre ces égalités, on obtient facilement

$$\frac{\alpha B_1}{\alpha C_1}\cdot\frac{\beta C_1}{\beta A_1}\cdot\frac{\gamma A_1}{\gamma B_1}=\frac{A_1'B}{A_1'C}\cdot\frac{B_1'C}{B_1'A}\cdot\frac{C_1'A}{C_1'B}. \tag{6}$$

Des égalités (5) et (6), on conclut

$$\frac{A_2C}{A_2B}\cdot\frac{C_2B}{C_2A}\cdot\frac{B_2A}{B_2C}=-\left(\frac{A_1B}{A_1B}\cdot\frac{B_1C}{B_1C}\cdot\frac{C_1A}{C_1A}\right)\left(\frac{A_1'B}{A_1'C}\cdot\frac{B_1'C}{B_1'A}\cdot\frac{C_1'A}{C_1'B}\right) \tag{7}$$

ou

$$\frac{A_2B}{A_2C}\cdot\frac{B_2C}{B_2A}\cdot\frac{C_2A}{C_2B}=-\frac{AB_1\cdot AB_1'}{AC_1\cdot AC_1'}\cdot\frac{BC_1\cdot BC_1'}{BA_1\cdot BA_1'}\cdot\frac{CA_1\cdot CA_1'}{CB_1\cdot CB_1'}. \tag{8}$$

La relation (7) montre que si les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont concourantes et si les points A_1', B_1', C_1' sont collinéaires, les points A_2, B_2, C_2 sont aussi collinéaires. Or, dans ce cas, les points α, β, γ sont situés sur la même droite $A_1'B_1'C_1'$; le théorème qui résulte est le théorème corrélatif du théorème de M. Neuberg.

La relation (8) montre que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont concourantes si les points A_1, A_1', B_1, B_1', C_1, C_1' sont sur la même conique.

Dans le cas particulier où les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont concourantes, ainsi que les droites AA_1', BB_1', CC_1', les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont aussi concourantes.

NOUVELLES NOTES HISTORIQUES ET ANALYTIQUES

par M. A. Aubry.

×I. **Cinq problèmes de géométrie sur le terrain.** 1° *Du point* A, *abaisser une perpendiculaire sur la droite* BO. Prendre sur BO, BC = AB; prolonger AC, de CD = BC; joindre A au milieu E de BC; AE coupe BD en F. Tirer CF, qui rencontre AB en G; sur DG, prendre DH = AC. AH est la perpendiculaire cherchée.

2° *Trouver le diamètre et la distance d'un bassin circulaire inaccessible.* Du point A, mener deux tangentes sur lesquelles on prendra AB = AC. Par B et C, on mènera deux autres tangentes se coupant en D. La distance de A au centre O et le diamètre sont donnés respectivement par les deux formules

$$\frac{AD\cdot AB}{BD-AB},\qquad \frac{OA\cdot BC}{AB}.$$

Digitized by Google

3° *Raccorder deux droites égales* SM, SN *par un arc circulaire qui les touchent en* M *et* N. Sur MN, on prend MP = NQ = SM = SN. Sur PS, à partir de P, et sur QS, à partir de S, on prendra successivement une même longueur $Pa = ab = bc = \cdots = S\alpha = \alpha\beta = \beta\gamma = \cdots$. Les intersections $M\alpha - Na$, $M\beta - Nb$, ··· dessineront la courbe.

4° *Tracer un arc de cercle tangent aux trois côtés du triangle* Smn. A l'aide d'un cordeau, portons sur les côtés Sm, Sn, les longueurs SM, SN égales chacune au demi-périmètre du triangle et prenons sur MS et NS, MQ = NP = MN; prenons également sur MP et NQ les deux longueurs égales et d'ailleurs quelconques MT, QV. Les droites MV et NT se coupent sur la courbe demandée.

5° *Raccorder deux droites* SM, SN *par un arc de cercle de rayon* R, *qui leur soit tangent.* Prenons sur les deux droites des longueurs égales SB = SC; soit A le point milieu de BC; puis prenons $SM = SN = \frac{SA}{BA} R$, et sur le milieu V de MN, menons une perpendiculaire $VT = \left(1 - \frac{BC}{2.SB}\right) R$.

L'arc passe par le point T et touche les deux droites données en M et N. On a autant de points intermédiaires qu'on veut à l'aide du théorème de Pascal. Ainsi, on tirera une transversale quelconque SU, qui coupera MT en U et NT en V; l'intersection de MV et de NU appartient à la courbe.

II. **Nouvelle logarithmotechnie.** 1. Les deux suites

$$F(x) = \frac{x}{n} + \frac{x}{n+x} + \frac{x}{n+2x} + \cdots + \frac{x}{n+(n-1)x},$$

$$\Phi(x) = \frac{x}{n+x} + \frac{x}{n+2x} + \cdots + \frac{x}{n+nx}$$

ont une même limite quand n tend vers l'infini, car la différence $F - \Phi$ (*) $= \frac{x^2}{n(1+x)}$ tend alors vers zéro. Cette limite, que nous désignerons par la notation $L(1+x)$ est finie; car elle est comprise, si x

(*) Pour simplifier, nous mettrons quelquefois F, Φ, *f*, φ, L au lieu de $F(x)$, $\Phi(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$ et $L(1+x)$.

Digitized by Google

est positif, entre n fois le premier terme de F et n fois le dernier terme de Φ. On a donc :

$$(1) \qquad x > \mathrm{L}(1+x) > \frac{x}{1+x} \qquad (x>0)$$

Ainsi soit $x=0,0^k1=1:10^{k+1}$, il viendra $0,0^k1>\mathrm{L}1,0^k1>0$, $0^{k+1}9^{i+1}$.

Cor. I. Changeant x en $\frac{x}{1-x}$, ce qui suppose que $\frac{x}{1-x}$ soit positif, ou qu'on ait $1>x>0$, il vient :

$$(2) \qquad \frac{x}{1-x} > \mathrm{L}\frac{x}{1-x} > x. \qquad (1>x>0,$$

II. La relation (1) montre que, x tendant vers zéro, $\frac{\mathrm{L}(1+x)}{x}$ tend vers l'unité.

3. Les nombres $a_1, a_2, \cdots$ étant positifs, on a :

$$a_1 + \cdots + a_n > n\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n},$$

d'où, si les quantités $\omega_1, \cdots \omega_n$ sont comprises entre zéro et l'unité,

$$n[1-\sqrt[n]{(1-\omega_1)\cdots(1-\omega_n)}] > \omega_1 + \cdots + \omega_n > n[1+\sqrt[n]{(1+\omega_1)\cdots(1+\omega_n)}].$$

Dans la première de ces inégalités, faisons

$$\omega_1 = \frac{x}{(x+n)}, \cdots \omega_n = \frac{x}{n+nx},$$

et dans la seconde,

$$\omega_1 = \frac{x}{n}, \cdots, \omega_n = \frac{x}{n+(n-1)x},$$

il viendra

$$(3) \qquad F > f > \varphi > \Phi,$$

en posant

$$f(x) = n(\sqrt[n]{1+x}-1), \quad \varphi(x) = n\left(1-\sqrt[n]{\frac{1}{1+x}}\right).$$

Ainsi, f et φ tendent vers une limite commune, qui ne peut être que celle de F et de Φ. Or k étant >1, on a :

$$(1+\theta)^k > 1+k\theta, \quad \text{d'où} \quad n(\sqrt[n]{1+x}-1) > kn(\sqrt[kn]{1+x}-1).$$

Digitized by Google

Donc, à mesure que n augmente, la valeur de f augmente, tandis que celle de φ diminue : on peut donc écrire :

(4) $$F > f \geq L > \varphi_1 > \Phi.$$

Cor. A cause de l'identité de Catalan,

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2n},$$

on a, quelque soit n,

(5) $$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n-1}>L2>\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\cdots-\frac{1}{2n}$$

et par conséquent,

(6) $$L2=\lim\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\right).$$

3. De $F > f$, on tire $\left(1+\frac{F}{n}\right)^n > 1+x$, d'où

$$0<\left(1+\frac{F}{n}\right)^n-(\sqrt[n]{1+x})^n<n\left(1+\frac{F}{n}\right)^{n-1}\left(1+\frac{F}{n}-\sqrt[n]{1+x}\right)$$
$$=\left(1+\frac{F}{n}\right)^{n-1}\left[F-n(\sqrt[n]{1+x}-1)\right].$$

Donc si n tend vers ∞, le second membre tend vers zéro et on a :

(7) $$\lim\left(1+\frac{F}{n}\right)^n=1+x$$

et, en écrivant, pour abréger, $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=(n, a)$,

(8) $$(n, F)>(\infty, L)=(1+x)>(-\infty, L)>(-n, \Phi).$$

4. On a, en général,

$$\frac{A^n-B^n}{B^{n-1}}>n(A-B)>\frac{A^n-B^n}{A^{n-1}} \qquad (A>B>0).$$

Or pour

$$A=\left[1+\frac{F(x)}{n}\right]\left[1+\frac{F(y)}{n}\right], \quad B=1+\frac{F(x+y+xy)}{n},$$

on a

$$C=n(A-B)=F(x)+F(y)+\frac{F(x)F(y)}{n}-F(x+y+xy),$$

Digitized by Google

et, d'après (7),

$$\lim A^n - B^n = (1+x)(1+y) - (1+x+y+xy) = 0,$$

donc

$$\lim C = \lim [F(x) + F(y)] - \lim F(x+y+xy) = 0, \tag{9}$$

ou, en écrivant $1+x=a$, $1+y=b$ et remplaçant $\lim F(x)$ par $L(1+x)$ ou La,

$$La + Lb = L(ab). \tag{10}$$

et de là,

$$L1 = 0, \quad La^{\frac{u}{v}} = \frac{u}{v} La. \tag{11}$$

Cor. I. Dans (1), faisons successivement

$$x = \frac{1}{n}, \ \frac{1}{n+1}, \ \frac{1}{n+2}, \ \ldots, \ \frac{1}{kn-1},$$

et additionnons, il viendra, en posant $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k} = H_k$,

$$H_{kn-1} - H_{n-1} > Lk > H_{kn} - H_n. \tag{12}$$

II. De (2) et de (10) on déduit aisément les développements en série de $L\frac{1}{1-x}$ et de $L(1+x)$. Voir JMS, 1900, p. 56 ou *Education Mathématique*, 1906, p. 351.

5. On sait que si m est un nombre rationnel supérieur à l'unité, et x un nombre quelconque compris entre $-\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{m}$, on a :

$$\frac{1}{1-mx} > (1+x)^m > 1+mx.$$

Par suite, si x est rationnel, on peut écrire :

$$\frac{n+kx}{n+(k-1)x} > (n, 1)^{\frac{n}{n+kx}} > \frac{n+(k+1)x}{n+kx}.$$

Changeons k en 1, 2, 3, $\cdots$ n et multiplions ; on verra que la valeur de $(n, 1)^r$ est comprise entre

$$1+\left(1-\frac{1}{n}\right)x \quad \text{et} \quad 1+\left(1-\frac{x-1}{n+x}\right)x.$$

Digitized by Google

Donc, si x est rationnel, on a :

(13) $$(\infty, 1)^{L} = 1 + x.$$

6. Des relations (7) et (13), on tire

$$\lim (n, 1)^{F} = \lim (n, F),$$

d'où, en posant $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$, $L(1^{i}+n) = X$,

(14) $$\lim\left(1+\frac{X}{n}\right)^{n} = e^{X}.$$

A PROPOS DES NOTES HISTORIQUES ET ANALYTIQUES DE M. AUBRY,

par M. Terloo (Valparaiso).

Voici, à propos de ces notes publiées dans *Mathesis* (1897, p. 62 et suivantes) quelques remarques élémentaires.

1. *Démonstration de la formule de Maskelyne.* Lorsque l'arc x est très-petit, on a approximativement les relations

$$\sin x = x - \tfrac{1}{6}x^{3}, \quad \cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^{2}.$$

De la première, on tire

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \tfrac{1}{6}x^{2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{5} = 1 - \tfrac{5}{6}x^{2} + \tfrac{5}{36}x^{4} - \cdots\cdots$$

En négligeant les puissances supérieures à la seconde, comme dans les premières relations, on a approximativement

$$\frac{\sin x}{x} = \sqrt[5]{1 - \tfrac{1}{2}x^{2}} = \sqrt[5]{\cos x};$$

$$\log \sin x = \log x + \tfrac{1}{5}\log \cos x.$$

De la même manière, approximativement aussi,

$$\operatorname{tg} x = x + \tfrac{1}{3}x^{3}, \qquad \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1 + \tfrac{1}{3}x^{2};$$

$$(\cos x)^{-\frac{2}{5}} = (1 - \tfrac{1}{2}x^{2})^{-\frac{2}{5}} = 1 + \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{1}{2}x^{2} + \cdots\cdots$$

$$= 1 + \tfrac{1}{5}x^{2} = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

Digitized by Google

donc

$$\log \operatorname{tg} x = \log x - \tfrac{2}{3} \log \cos x. \qquad (*)$$

8. *Quelques grands nombres.* 1° 2^{64}. Voici une méthode très-simple pour contrôler les puissances de 2, qu'on trouve dans le calcul de π, fait par Shanks, car $\frac{1}{5^n} = \left(\frac{2}{10}\right)^n$.

Pour obtenir 2^{64}, on a $2^{10} = 1024$, et je trouve :

$$\begin{aligned} 1024 &= n \\ 1024000 &= 1000n \\ 20480 &= 20n = n' \\ 4096 &= \tfrac{2}{10} n' \\ 2^{20} = 1048576 & \end{aligned}$$

J'ai formé la nouvelle puissance avec les doubles de n et n' et une seule addition. Pour obtenir 2^{30}, on fera $2^{20} = n$, $20n = n'$; alors $2^{30} = 10^5 n + n' + \frac{1}{5} n'$. — En poursuivant ce calcul très-rapide jusqu'à 2^{60}, on trouve, après la multiplication par 2^4, le nombre exact de M. Aubry.

Pour former les grandes puissances de 2, de la même manière on peut employer avec avantage $2^{25} = 33554432$, en observant que $3 = 2 + 1$, $4 = 2 \cdot 2$, $5 = \frac{1}{2} \cdot 10$. La n^e puissance de 2 a $3n+1$ chiffres.

2° M. Jules Tannery, dans ses *Leçons d'Algèbre et d'Analyse* (I, p. 295), donne 7 chiffres pour 10! et 158 chiffres pour 100! (Voir 8°).

6° J'ai indiqué la manière de calculer $\frac{1}{259^2}$ de la série de Machin : la période se compose de 1673 chiffres, et a été donnée dans *La Revista trimestral de Mathématicas de Zaragoza* (1904)

$$\frac{1}{259^2} = 0{,}000017506696311339\ldots\ 686612629330719.$$

7° La suite 2, 4, 16, 256,.... dont chaque terme est le carré du précédent, est formée par les puissances 2^1, 2^2, 2^4, 2^8, 2^{16},.... dont l'exposant E du 25° terme est $E = 2^{24} = 16777216$. On voit que ce terme est

$$t_{25} = 2^E \qquad \text{et que} \qquad \log t_{25} = E \log 2.$$

(*) Il serait intéressant de calculer l'erreur maxima que comportent ces formules (P. M.).

Digitized by Google

Je trouve,

$$E \log 2 = 5050445{,}259733675932....$$

Le terme a 5050446 chiffres et les premiers sont : 181858531....

8° Le produit des cent mille premiers entiers (10^5)! a 456574 chiffres, dont les premiers sont 28243291...., le logarithme du produit étant 456573,4508999709.... (Voir CALLET, éd. 1857, p. 47).

NOTES MATHÉMATIQUES.

8. *Sur une transformation géométrique.* La question 1407 (*Mathesis*, 1904, p. 94) m'a suggéré le transformation suivante :

Soit m l'axe radical d'un cercle fixe (O, R) *et d'un cercle* (M, r) *de rayon constant. Trouver l'enveloppe de la droite m lorsque le point* M *décrit une courbe donnée* (M) *ou le lieu de* M *lorsque* (*m*) *enveloppe une courbe donnée* (*m*).

Prenons pour axes coordonnés deux diamètres rectangulaires du cercle fixe. Les équations des deux circonférences étant

$$X^2 + Y^2 = R^2, \quad (X - x)^2 + (Y - y)^2 = r^2,$$

celle de leur axe radical est

$$2Xx + 2Yy - R^2 + r^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

Si on le représente par $ux + vy + 1 = 0$, on a

$$u = \frac{2x}{r^2 - R^2 - x^2 - y^2}, \qquad v = \frac{2y}{r^2 - R^2 - x^2 - y^2};$$

les formules inverses sont

$$x = u\,\frac{-1 + \sqrt{1 + (r^2 - R^2)(u^2 + v^2)}}{u^2 + v^2} = u\,\frac{r^2 - R^2}{1 + \sqrt{1 + (r^2 - R^2)(u^2 + v^2)}}$$

$$y = v\,\frac{r^2 - R^2}{1 + \sqrt{1 + (r^2 - R^2)(u^2 + v^2)}}.$$

Par suite, si la droite *m* enveloppe une courbe de classe *n*, le point M parcourt en général une courbe d'ordre $2n$.

Voici quelques cas particuliers remarquables.

Si la droite *m* tourne autour d'un point fixe, le centre M décrit une circonférence.

Digitized by Google

Si la droite m roule sur une conique à centre, le point M décrit une quartique qui sera une *cartésienne*, lorsque la conique est remplacée par une circonférence.

Si la courbe m est une parabole, le lieu de M est une cubique.

Supposons $r = R$ et appelons S le pied et l'axe radical m ou le milieu de la distance OM. Le point S décrit la podaire de O par rapport à la courbe (m); M décrit une courbe homothétique à cette podaire. Donc si m enveloppe une circonférence passant par O, M parcourt un limaçon de Pascal; si m enveloppe une parabole ayant pour sommet O, M décrit une cissoïde. (J. Déprez)

Si l'on désigne par ρ et ρ_1 les rayons vecteurs OM, OS, S étant le pied de l'axe radical m, on a

$$\overline{OS}^2 - R^2 = \overline{MS}^2 - r^2, \quad \text{ou} \quad \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 = r^2 - R^2. \qquad (1)$$

Posons $r^2 - R^2 = K$. Les transformations (M, m) et (M, S) ne dépendent que de la différence $r^2 - R^2$; donc si $R > 0$, on peut remplacer le cercle fixe (O, R) par le point-cercle (O, 0) et le cercle variable (M, r) par le cercle $(M, \sqrt{K})$; si $K < 0$, on substituera au cercle fixe (O, R) le cercle $(O, \sqrt{-K})$ et au cercle (M, r), le point-cercle (M, 0). Rappelons que l'axe radical d'un cercle (O, R) et d'un point N est la parallèle à la polaire de N, menée à égale distance de cette polaire et du point N.

Si $K < 0$, l'enveloppe de m qui correspond à une courbe donnée (M) se construit facilement au moyen de la transformée par polaires réciproques de la courbe (M). Cette construction devient encore applicable dans l'hypothèse $K < 0$ si l'on considère le cercle imaginaire $(O, \sqrt{K})$; la réciproque de la courbe (M) est alors la symétrique par rapport à O de celle que l'on construirait en prenant pour cercle directeur le cercle réel $(O, \sqrt{-K})$.

En dérivant l'équation (1) par rapport à l'angle polaire $MOx = \theta$, on trouve

$$\rho_1\rho_1' - \rho\rho_1' - \rho'\rho_1 = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\rho_1'}{\rho'} = \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho};$$

cette formule qu'on peut encore écrire ainsi

$$\frac{\rho'}{\rho_1'} + \frac{\rho}{\rho_1} = 1,$$

exprime une propriété très simple des sous-normales.

Digitized by Google

L'égalité (1) étant mise sous la forme

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\rho_1 - \frac{K}{\rho_1}\right)$$

montre que M est au milieu de la distance de S au transformé S′ de S dans une inversion de pôle O et de puissance — K; le lieu de S′ est une transformée par polaires réciproques de la courbe (m). (J. N)

9. *Albert Dürer, précurseur de Monge.* Dans un Mémoire publié sous ce titre, parmi ceux de l'Académie des Sciences de Naples (t. XIII, 1907), M. le Professeur F. Amodeo, démontre par des extraits et des dessins empruntés aux écrits d'A. Dürer, que celui-ci, dès 1525, représentait systématiquement des figures géométriques, par exemple, l'hélice (cylindrique, conique, sphérique), l'ellipse, la parabole, l'hyperbole, un cube et son ombre, une tête d'homme, etc., sur deux ou même sur trois plans de projection rectangulaires.

Pour obtenir la troisième projection (ou plutôt une figure symétrique de la troisième projection), quand il en connait deux, Dürer emploie un procédé assez curieux, basé sur l'emploi de la règle et de l'équerre seules.

Soient XX la ligne de terre intersection du plan horizontnl et du plan vertical, YY la ligne d'intersection du plan vertical et du plan de profil supposé rabattu autour de YY sur le plan vertical; YX une droite coupant sous un angle de 45°, les lignes YY, XX; O le point d'intersection de XX et YY. Soient a', a'' les projections d'un point A sur le plan vertical et le plan de profil. Menons par a'' une parallèle à YY rencontrant XY en a'''. Les parallèles $a'''a$ à XX, $a'a$ à YY se rencontreront en un point a qui sera la projection horizontale d'un point symétrique de A, par rapport à un plan O parallèle au plan vertical mené par le milieu de OY.

BIBLIOGRAPHIE.

Carlo Bourlet. **Éléments de Géométrie.** Géométrie plane, géométrie dans l'espace, contenant 762 Exercices. Rédigés conformément aux programmes de l'enseignement secondaire des garçons, 1er et 2e cycles, classes de 4e et 3e A, de 2e et 1r A et B et de l'enseignement secondaire des jeunes filles, 3e, 4e et 5e années, Paris, Hachette, 1903. In-12, cartonné VI - 378 pp. Prix 2.50 frs.

Digitized by Google

CARLO BOURLET. **Cours abrégé de Géométrie**, publié avec de nombreux exercices théoriques et pratiques et des applications au dessin géométrique, 1er et 2e cycles. Géométrie plane, géométrie dans l'espace. Paris, Hachette, 1906. (2 vol. cart. de VIII - 494 et VIII - 338 p.). Prix : 2.50 + 1.50 fr.

BAUDOIN. **Cahiers d'exécution de dessins geometriques**, correspondants aux exercices graphiques du Cours abrégé de Géométrie, par M. CARLO BOURLET. Paris, Hachette, 1906. (Deux cahiers in 4 oblongs contenant 59 feuilles avec texte) Prix 1.50 + 2 00.

La réforme des programmes des lycées français a fait éclore une foule de nouveaux manuels rédigés dans le sens des circulaires ministérielles Les auteurs ont essayé de mettre la science à la portée de toutes les intelligences en rendant l'enseignement aussi intuitif que possible. Sous ce rapport, les ouvrages de M. Bourlet occupent une des premières places et nous ne pouvons que les recommander à nos élèves des athénées et collèges. Ils renferment une multitude d'indications propres à rendre les leçons de géométrie instructives et attrayantes; des figures très bien exécutées facilitent l'intelligence des démonstrations; les exercices de dessin proposés sont très propres à faire comprendre les théories et à inspirer le goût des épures soignées.

La théorie des parallèles diffère complètement de celles que l'on rencontre dans les manuels en usage chez nous. Depuis une trentaine d'années, M. Méray, professeur à l'Université de Dijon, a publié des éléments de géométrie dans lesquels les postulats ordinaires sont remplacés par le suivant déjà connu: *Le lieu des points situés à une même distance d'une droite est une droite*, mais ayant reçu cette forme plus moderne : *quand un plan glisse sur un autre de manière qu'une droite du premier glisse sur une droite fixe du second* (mouvement de translation), *tout point du premier plan décrit sur le second plan une ligne droite*

Il est vrai que M. Bourlet demande d'abord sous le nom de *postulat de Méray*, d'admettre que *deux translations successives équivalent à une seule translation*, et qu'il déduit de là que dans toute translation rectiligne la trajectoire d'un point mobile est une droite. Il a exposé d'une manière complète ses idées dans un article intitulé : *Théorie des parallèles basée sur la translation rectiligne* et qui a paru dans les NAM, 1906. On peut aussi consulter sur le même sujet, dans le *Bulletin de la Société française de philosophie*, 7e année, n° 6, juin 1907, l'article intitulé *L'enseignement de la Géométrie*, où M. Bourlet a exposé sa manière de voir et où elle a été discutée par MM. Borel, Lalande, Marotte, Pécaut, Ogereau, Sorel(*).

(*) Selon nous, la principale objection philosophique à faire à la méthode d'exposition de la géométrie basée sur l'idée de mouvement est la suivante : le mouvement par définition, est un changement de distance ; l'idée de distance est donc l'idée fondamentale de la géométrie comme De Tilly l'a dit depuis longtemps et, plus récemment, Pieri — Il en résulte que, toutes choses égales d'ailleurs, l'exposition euclidienne des principes de la géométrie, où l'idée de mouvement intervient à peine, est plus simple, *pour les commençants*, que l'exposition nouvelle, où l'on fait intervenir plus explicitement cette

Digitized by Google

Voici un résumé de la table des matières des éléments de géométrie :

Géométrie plane. Chap. I. Les déplacements élémentaires. Définitions. Translation. Parallèles. Mesure des angles. Rotation autour d'un point. Symétrie par rapport à un point (pp. 7-68). Chap. II. Les figures élémentaires. Symétrie par rapport à un point. Cercle, égalité des triangles, parallélogrammes Lieux géométriques. Constructions (pp. 76-140). Chap. III. La similitude Lignes proportionnelles. Homothétie. Similitude. Lignes trigonométriques. Polygones réguliers. Circonférence du cercle (pp. 157-235). Chap. IV. Les Aires (pp. 224-272).

Géométrie dans l'espace. Chap. V. Les déplacements élémentaires. Droites et plans. Translations. Droites et plans parallèles Dièdres Rotations. Plans et droites perpendiculaires. Projections (pp 279-323). Chap. VI. Les polyèdres. Prismes et pyramides Aires et volumes (pp 336-353).

Le plan du cours abrégé est à peu près le même avec une tendance plus pratique. I. *Géométrie plane* 1. Dessin géométrique. 2. Les déplacements élémentaires. 4. La similitude. 5. Les aires. 6. Les courbes usuelles : coniques, conchoïdes, cissoïde. II. *Géométrie dans l'espace.* 1. Les déplacements élémentaires. 2. Les projections. 3. Les polyèdres. 4. Les corps ronds. Lavis. *Appendice* : Arpentage, lever des plans, nivellement.

Cahiers de dessin. I (Au moyen de la règle et de l'équerre). Maçonnerie, carrelages, encadrements, ébénisterie, bordures variées, fenêtre, menuiserie, toiture et denticules, lettres, mosaïques, entrelacs, dallage, vitraux, II. Translations, symétries, lieux géométriques, tangentes, raccords, grille, anses de panier, ogive, échelles, homothétie, transformation, volute, rosaces, marqueterie, aires équivalentes, ellipses, hyperboles, paraboles, conchoïdes, limaçons, cissoïdes. (J. N.)

Leerboek der Rekenkunde, door N. L. W. A. Gravelaar. 2e deel, 3e verbeterde druk. Groningen, P. Noordhoff, 1907 (In-8° de IV, 175 pages). Prix 1,25 florins.

La 3e édition du *Leerboek* de M. Gravelaar est divisée en deux fascicules. Le premier a paru dès 1904, et je l'ai alors annoncé dans *Mathesis* (t. 24e, pp. 139 et 140). L'auteur nous en donne aujourd'hui le second. Il a tout l'intérêt du premier; car comme je le disais en 1904, par la position officielle de M. Gravelaar à l'école normale de Deventer, nous nous rendons parfaitement compte, dans son *Leerboek*, du caractère propre de l'enseignement de l'arithmétique raisonnée en Hollande. Il permet d'en avoir haute idée. M. Gravelaar prend pour épigraphe une phrase écrite par M. Jules Tannery dans son *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* : « On peut constituer entièrement l'analyse avec la notion du nombre entier et les notions relatives à l'addition des nombres entiers ; il est inutile de faire appel à aucun autre postulat, à aucune

---

notion de mouvement. Mais pour les élèves plus avancés, on a raison d'employer de plus en plus cette notion complexe mais féconde, une fois les principes fondamentaux bien assis. (P. Mansion)

Digitized by Google

autre donnée de l'expérience.» Ce principe qui avait déjà dirigé M. Gravelaar dans la première partie de son ouvrage, lui sert encore maintenant de jalon.

Le nombre irrationnel est défini par la notion purement arithmétique de *coupure*. C'est, pour parler avec l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, le *point de vue* de Dedekind. C'est aussi, on le sait, le point de vue de Jules Tannery lui-même, et à peu de chose près, celui où s'était placé Joseph Bertrand.

A la base de la théorie des limites, nous trouvons une démonstration minutieuse de ce théorème de O. Stolz: *Dans le développement, supposé possible, de* $(1+d)^n$, *où* $d>0$, *on a, pour* $n>1$,

$$\frac{1}{1-\frac{nd}{1+d}} > (1+d)^n > 1+nd, \quad \frac{1}{1+\frac{nd}{1-d}} > (1-d)^n > 1-nd;$$

pour $n<1$,

$$\frac{1}{1-\frac{nd}{1+d}} < (1+d)^n < 1+nd, \quad \frac{1}{1+\frac{nd}{1-d}} < (1-d)^n < 1-nd;$$

enfin, dans les cas particuliers, $d=0$, *ou* $n=1$, *les inégalités précédentes se transforment en égalités.*

La théorie des opérations abrégées est exposée en détail. A propos du calcul par les logarithmes, on trouve l'explication des logarithmes d'addition et de soustraction de Gauss et la manière de les employer. Voici, au demeurant, la traduction de la table des matières. La division en livres et en chapitres y fait défaut, mais nous croyons utile, pour la clarté, d'y ajouter les numéros omis dans l'original.

1° Définition des limites. Mesure des grandeurs. 2° Extraction des racines carrées dans le système décimal. 3° Extraction des racines cubiques dans le système décimal. 4° Définition des nombres incommensurables. 5° Les sept opérations fondamentales appliquées aux nombres incommensurables. (*a.* Addition; *b.* Soustraction; *c.* Multiplication; *d.* Division; *e.* Elévation aux puissances; *f.* Extraction des racines; *g.* Logarithmes). 6° Propriétés des limites. 7° Approximations numériques dans le système décimal; 8° Opérations abrégées. (*a.* Addition; *b.* Soustraction; *c.* Multiplication; *d.* Division; *e.* Racine carrée; *f.* Racine cubique; *g.* Exemples) 9° Approximations numériques calculées avec une erreur moindre qu'un nombre donné. 10. Proportions. 11° Progressions arithmétiques. 12° Progressions géométriques. 13°. Série harmonique. 14° Séries illimitées. 15° Logarithmes (*a.* Logarithmes vulgaires; *b.* Emploi des logarithmes dans le calcul; *c.* Intérêts simples et composés; *d.* Emploi des logarithmes dans la résolution des équations et notamment dans la résolution de l'équation exponentielle).

H. Bosmans, S. J.

Digitized by Google

Leerboek der Planimetrie, door N. L. W. A. Gravelaar. Derde druk. Te Groningen, bij J. B. Wolters, 1907 (1 vol. in-8° de VIII, 184 pages). Prix : 1,25 florin.

Le livre de M. Gravelaar est destiné à des enfants de 12 à 13 ans, qui apprennent la géométrie pour la première fois ; l'auteur a soin de nous en avertir dans la préface. Il faut pour eux accepter une situation de fait, — il s'agit, bien entendu, de la Hollande, — c'est que dans le premier enseignement, on ne leur démontre pas les propositions dont la vérité se *voit* ; on se contente de prouver celles dont l'exactitude ne se *voit* pas intuitivement. Exemple : M. Gravelaar admet comme postulat les proposition relatives aux parallèles coupées par une transversale, et le premier théorème qu'il démontre est l'égalité de l'angle extérieur d'un triangle et de la somme des angles non adjacents. Il faut en effet exécuter une construction pour faire *voir* à l'enfant la vérité de la proposition.

Que penser du fonds même de la méthode ? La question est trop discutée, trop importante pour la trancher à propos d'un simple compte-rendu. Aussi, en louant le livre de M. Gravelaar, j'entends bien réserver mon avis. Il est équitable toutefois en jugeant un ouvrage, et surtout un ouvrage d'enseignement, de se mettre au seul point de vue de ceux pour lesquels il est écrit. La *planimétrie* de M. Gravelaar nous semble donc très bien faite. Elle est, en toute hypothèse, des plus intéressantes à lire. En voici, par exemple, un côté assurément original. Pour soutenir l'attention des enfants, dit l'auteur, il faut les obliger à tenir constamment le crayon à la main, il faut les forcer à dessiner la figure dans toutes les positions, dans tous les cas possibles. Soit, nous n'en disconvenons pas ; mais le moyen employé par M. Gravelaar pour y arriver est curieux et imprévu : c'est de nous donner une géométrie élémentaire sans aucune figure dans le texte. Nous signalons simplement le fait, et nous entendons bien nous en tenir, de nouveau, à une pure constatation de la méthode, sans nous prononcer ici ni pour elle, ni contre elle. Une chose cependant nous a frappé, c'est, malgré cette absence de figures, l'admirable clarté d'exposition de plusieurs des démonstrations de M. Gravelaar. (1)

Les matières traitées dans la *planimétrie* correspondent à celles des quatre premiers livres des *Eléments de Géométrie* de Blanchet.

H. Bosmans, S. J.

---

(1) Cette tentative de M. Gravelaar, nous en rappelle une autre, peut-être plus curieuse encore, faite au XVI^e^ siècle, par le célèbre Scheybl (Scheubelius). Scheybl donna à Bâle, en 1550, à la suite de son algèbre, une édition des six premiers livres des *Eléments* d'Euclide, dans laquelle il omet intentionnellement toutes les lettres des figures. Les points et les lignes se désignent chaque fois au long par des périphrases. M. Gravelaar, lui, emploie avec raison des lettres, comme si les figures étaient dessinées. Si son essai plaît au lecteur, dit Scheybl, dans la postface de l'ouvrage, il donnera dans le même style, les

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1641.

(Voir *Mathesis*, (3). VII, p. 256).

Les nombres

$$N = 17^2 - 3, \quad N_1 = (17^2 + 1)^2 - 3, \quad N_2 = [(17^2 + 1)^2 + 1]^2 - 3, \ldots$$

dont la loi de formation est bien nette, sont tous multiples de 13, *et les nombres* N_2, N_4, N_6, ... *sont divisibles par le premier,* N (Enoncé rectifié).

(E. N. Barisien)

La première partie a été bien résolue par MM. Abramescu, Rose, Terracini, Baidaf, Van Dinter, Degueldre, Prange, Liénard, Plakhovo et Constantinescu. Nos honorables correspondants ont également reconnu que la seconde partie était erronée. La rectification a été indiquée par MM. Plakhovo et Constantinescu.

On peut écrire

$$N_r = (N_{r-1} + 4)^2 - 3 = N^2_{r-1} + 8N_{r-1} + 13;$$

donc si N_{r-1} est divisible par 13, N_r l'est également, etc.

On a $N = 286 = 2.11.13$; on voit facilement que les nombres N_2, N_4, N_6... sont pairs. Nous allons démontrer qu'ils sont divisibles par 11.

Supposons donc $N_{2r} = M11$. Alors

$$N_{2r+1} = (N_{2r} + 4)^2 - 3 = (M11 + 4)^2 - 3 = M11 + 2,$$

$$N_{2r+2} = (N_{2r+1} + 4)^2 - 3 = (M11 + 6)^2 - 3 = M11 + 33 = M11.$$

---

derniers livres des *Éléments*. Il n'y fut guère invité, semble-t-il, car ces derniers livres ne parurent jamais. Chose étonnante, cependant, Scheybl parvient, dans cette espèce de gageure, sinon à être toujours fort clair, du moins à rester cependant à peu près intelligible. La Bibliothèque Royale de Belgique possède un exemplaire de cet ouvrage singulier. *Euclidis Megarensis, philosophi et mathematici excellentissimi, sex libri priores, de geometricis principiis, graeci et latini, una cum demonstrationibus propositionum, absque literarum notis, veris ac propriis, et aliis quibusdam, usum earum concernentibus, non citra maximum hujus artis studiosorum emolumentum adjectio. Algebrae porro regulae... his libris praemissae sunt, eaedemque demonstratae. Authore Iohanne Scheubelio... Basileae, per Joannem Hervagium.* A la dernière page. *Basileae, per Joannem Hervagium Anno salutis humanae* M. D. L. *Mense Septembri* (Fonds de la ville, N° 4932).

Digitized by Google

M. Constantinescu a généralisé la question 1641 en considérant les nombres N_1, N_2, N_3,. . définis par

$$N_1 = (n+1)^m - n, \quad N_{i+1} = (N_i + n + 1)^n - n,$$

et en démontrant que la différence $N_{k+i} - N_i$ est divisible par N_k. Il en déduit que les nombres N_{2i}, N_{3i},... sont divisibles par N_i. Si l'on fait $n = 3$, $m = 2$, on obtient les nombres de M. Barisien en commençant par $N_1 = (3+1)^2 - 3 = 13$, $N_2 = 17^2 - 3$, ..

Question 1643.

(Voir *Mathesis*, (3), VII, 256).

On considère une droite m et deux points A, B, *non situés dans un même plan avec m. Soit* C *un point quelconque de m. Par* A *on mène un plan* α *perpendiculaire à la droite* BC, *et par* B *un plan* β *perpendiculaire à la droite* AC. *L'intersection des plans* α *et* β *engendre un paraboloïde hyperbolique.*

Réciproquement, tout paraboloïde hyperbolique admet ce genre de génération ; comment peut-on choisir A, B *et m ?*

Trouver le lieu de l'orthocentre du triangle ABC.

Examiner le cas particulier où les droites AB *et m sont perpendiculaires l'une sur l'autre.* (J. N.)

Solution par MM. Aenden Boom et Abramescu. (*) 1. Menons par A la perpendiculaire $AA_1 = a$ au plan Bm, par B la perpendiculaire $BB_1 = b$ au plan Am. Le plan α passe constamment par a et par la hauteur AA′ du triangle ABC; de même, le plan β passe constamment par b et par la hauteur BB′. Soient CC′ la troisième hauteur et H l'orthocentre de ABC, γ le plan mené C perpendiculairement à AB. Les trois plans α, β, γ, se coupent évidemment suivant la perpendiculaire $HH' = h$ élevée en H sur le plan ABC.

Cela posé, lorsque C parcourt m, les droites AC, BC engendrent deux faisceaux projectifs; il en résulte que les plans β, α, perpendiculaires à ces droites, se correspondent dans deux faisceaux projectifs de plans.

(*) Nous fondons les deux solutions en une seule en empruntant à chacune d'elles ce qu'elle a de meilleur. (Rédaction).

Digitized by Google

Par conséquent, leur intersection h engendre une série réglée et comme elle est toujours située dans un plan γ qui est perpendiculaire à AB, la série réglée appartient à un paraboloïde hyperbolique. Cette dernière conclusion peut aussi se déduire de ce que les droites AC, BC sont parallèles à m lorsque C est à l'infini sur m; les plans α et β sont alors perpendiculaires à m. Observons donc que les deux plans directeurs sont, l'un perpendiculaire à AB, l'autre à m.

2. *Réciproquement,* soient a et b deux génréatrices quelconques d'un même mode d'un paraboloïde hyperbolique donné.

Menons par a et b des plans perpendiculaires sur le plan directeur de l'autre mode de génération ; ils couperont b et a aux points cherchés B et A. Comme la droite m doit être perpendiculaire à la fois à a et b, elle est à l'intersection du plan mené par A perpendiculairement à b avec le plan perpendiculaire à a et passant par B. Donc le paraboloïde réglé admet d'une infinité de manières le mode de génération indiqué ci-dessus.

Soit A_1 la projection de A sur le plan Bm ; la droite A_1A' sera perpendiculaire à BC. Donc le lieu du point A′ est une circonférence de diamètre A_1B et la hauteur AA′ engendre un cône du second ordre.

Semblablement la droite BB′ engendre un cône quadratique. Le lieu de H est la courbe d'intersection de ces deux cônes qui ont une génératrice commune AB ; donc c'est une cubique gauche.

3. Si les droites m et AB sont perpendiculaires, menons par m un plan μ perpendiculaire à AB et par AB un plan ν perpendiculaire à m; ces plans se couperont suivant la perpendiculaire ST commune aux droites m et AB. Soient AD, BE les hauteurs du triangle ASB issues de A, B et H′ l'orthocentre; ST est la troisième hauteur. Les droites a, b coïncident maintenant avec AH′, BH′; donc, les plans α, β se correspondent dans deux faisceaux projectifs qui ont un élément uni ν; par suite, leur intersection engendre un faisceau de rayons de centre H′. D'ailleurs si C est un point quelconque de m, CT est une hauteur du triangle CAB et l'orthocentre H est situé sur CT. On peut donc dire que le paraboloïde hyperbolique a dégénéré en un système de deux plans μ et ν. Le plan ν correspond au point C transporté à l'infini sur m.

4. On a, d'après un théorème connu :

$$TA.TB = TH'.TS = TH.TC.$$

Digitized by Google

Il résulte de là que le point H décrit, dans le plan μ, une circonférence de diamètre H'D.

La même question a été résolue par MM. Verheugen, Claeys, Degueldre, Van Dinter et Baidaf.

Question 1645.

(Voir *Mathesis* (3), VII, p. 256.)

Intégrer l'équation $\left(p = \frac{dy}{dx}\right)$

$$ap^3 + bp^2 = (3ay + 2bx + c)^2.$$

Solution par J. Rose. On peut écrire

$$3ay + 2bx + c = p\sqrt{ap + b}; \qquad (1)$$

en dérivant, il vient successivement

$$3ap + 2b = \left[\sqrt{ap + b} + \frac{ap}{2\sqrt{ap + b}}\right]\frac{dp}{dx},$$

$$3ap + 2b = \frac{3ap + 2b}{2\sqrt{ap + b}}\frac{dp}{dx}.$$

Cette équation se décompose en deux autres

$$3ap + 2b = 0, \ (2); \quad dx = \frac{dp}{2\sqrt{ap + b}}$$

Si l'on élimine p entre la première et l'équation, on trouve l'*intégrale singulière*

$$3ay + 2bx + c + \frac{2b\sqrt{3b}}{9a} = 0.$$

La seconde solution donne

$$x + c = \sqrt{ap + b}. \qquad (3)$$

En éliminant p entre cette égalité et l'équation proposée, on trouve *l'intégrale générale*

$$(x + c)[(x + c)^2 - b] - a(3ay + 2bx + c) = 0.$$

Remarque. L'équation proposée est une transformation linéaire de l'équation

$$p^3 - \tfrac{5}{2}p^2 = (y - z)^2$$

Digitized by Google

proposée à un examen de licence en France. Elle avait pour but d'attirer l'attention des lecteurs sur l'intégration par différentiation qui exige une vérification des solutions qu'on déduit *uniquement* de l'équation dérivée de l'équation proposée. Cette vérification a été inutile dans la solution de M. Rose parce qu'on a éliminé p entre (1) et (2) et entre (1) et (3). (J. N.)

Autres solutions par MM. Verheugen, Abramescu, Aen den Boom, Bar et Van Dinter.

Généralisation. On peut appliquer la même méthode à l'intégration de l'équation

$$ap^n + bp^{n-1} = [nay + (n-1)bx + c]'$$

n étant entier.

En effet, on aura successivement

$$[anp^{n-1} + (n-1)bp^{n-2}]\frac{dp}{dx} = [nay + (n-1)bx + c]\,[nap + (n-1)b]$$

d'où les solutions singulières

$$nay + (n-1)bx = -c \pm \left[-\frac{(n-1)b}{na}\right]^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{b}{n}}.$$

Ensuite,

$$p^{n-2}\frac{dp}{dx} = nay + (n-1)bx + c$$

ou, en remarquant que

$$nay + (n-1)bx + c = \pm\sqrt{ap^n + bp^{n-1}}$$

$$p^{n-2}\frac{dp}{dx} = \pm 2\sqrt{ap^n + bp^{n-1}}$$

ou encore

$$p^{\frac{n-3}{2}}(ap+b)^{-\frac{1}{2}}dp = \pm 2dx$$

Le premier membre est une différentielle binôme intégrable si n est entier. Si n est pair, on posera $ap + b = z$; si n est impair, on posera $ap + b = up$. — L'élimination de p ne sera peut être pas toujours possible ; l'intégrale générale de Cauchy sera donc déterminée dans ce cas par deux équations simultanées où p est un paramètre. (Rose)

Digitized by Google

×Question 1049.

(Voir *Mathesis*, (3), VII, p. 280).

Soient A′, B′, C′ *les milieux des côtes d'un triangle* ABC. *Par un point* P *pris à l'intérieur du triangle* A′B′C′ *on mène une droite qui rencontre les côtés* AB, AC *en des points* C_a, B_a *tels que* P *soit le milieu du segment* C_aB_a. *Si* A_bC_b, B_cA_c *sont les segments analogues dans les angles* ABC, CAB, *on demande :* 1° *la relation qui existe entre les aires des triangles* AB_aC_a, BC_bA_b, CA_cB_c ; 2° *l'aire de l'hexagone en fonction des coordonnées normales.*

Solution par M. G. VERHEUGEN. Appelons α, β, γ les coordonnées normales de P, et soient T, T_a, T_b, T_c lès surfaces des triangles ABC, AB_aC_a, BC_bA_b, CA_cB_c. Désignons encore par, a, b, c les côtés et par R le rayon du cercle circonscrit. 1° P étant le milieu de B_aC_a, les distances de B_a à AB et de C_a à AC sont égales à 2α et 2β ; d'où

$$AB_a = \frac{2\gamma}{\sin A} = \frac{4R\gamma}{a}, \quad AC_a = \frac{4R\beta}{a}, \quad BA_b = \frac{4R\gamma}{b},$$

$$BC_b = \frac{4R\alpha}{b}, \quad CA_c = \frac{4R\beta}{c}, \quad CB_c = \frac{4R\alpha}{c}.$$

Il en résulte

$$T_a = \frac{AC_a \times AB_a \sin A}{2} = \frac{16R^2\beta\gamma \sin A}{2a^2} = \frac{4R\beta\gamma}{a} = \frac{4R\alpha\beta\gamma}{a\alpha}$$

on aura donc

$$T_a : \frac{1}{a\alpha} = T_b : \frac{1}{b\beta} = T_c : \frac{1}{c\gamma}$$

ou

$$AB_aC_a \times BPC = BA_bC_b \times APC = CA_cB_c \times APB.$$

2° Les triangles C_bPB_c, A_bPA_c sont égaux comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun. Appelons H l'aire de l'hexagone ; on a

$$H = 2A_cPA_b + 2B_aPB_c + 2C_aPC_b$$
$$= A_cA_b \times \alpha + B_aB_c \times \beta + C_aC_b \times \gamma ;$$

or,

$$A_cA_b = BA_b + CA_c - a = \frac{4R\gamma}{b} + \frac{4R\beta}{c} - a = \frac{4R(c\gamma + b\beta - T)}{bc} = \frac{4R(T - a\alpha)}{bc}$$

$$B_aB_c = \frac{4R(T - C\beta)}{ac}, \quad C_aC_b = \frac{4R(T - c\gamma)}{ab}$$

Digitized by Google

$$H = \frac{4R}{abc}\Big[a\alpha(T - a\alpha) + C\beta(T - C\beta) + c\gamma(T - c\gamma)$$
$$= \frac{1}{T}\Big[2T^2 - (a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2)\Big]$$
$$= \frac{2ab\alpha\beta + 2ac\alpha\gamma + 2bc\beta\gamma - a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 - c^2\gamma^2}{a\alpha + b\beta + c\gamma}.$$

Ont résolu la même question MM. Abramescu, Constantinescu, Lamotte, Degueldre, Baidaf, Delahaye, Lez et Rose.

M. Abramescu signale la relation suivante :

$$\frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_b} + \frac{1}{T_c} = 2\sqrt{\frac{1}{T_a T_b T_c}},$$

qu'il déduit de l'élimination de α, β, γ entre les égalités

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 2T,$$
$$T_a = \frac{4R\beta\gamma}{a},\quad T_b = \frac{4R\gamma\alpha}{b},\quad T_c = \frac{4R\alpha\beta}{c}.$$

×Question 1650.

(Voir *Mathesis*, (3), VII, p. 280).

Des sommets d'un triangle ABC *comme centres on décrit trois circonférences* (A), (B), (C) *tangentes aux côtés opposés.* 1° *Demontrer que le rapport des distances du milieu* A′ *de* BC *à l'axe radical des cercles* (B), (C) *et au pied de la hauteur* AH *est égal à* $\sin^2 A$. 2° *Que les axes radicaux de ces cercles combinés avec le cercle* ABC *forment un triangle homologique avec le triangle* ABC, *le centre d'homologie étant le point de Lemoine et l'axe d'homologie ayant pour équation barycentrique*

$$\alpha \cot^2 A + \beta \cot^2 B + \gamma \cot^2 C = 0;$$

3° *les coordonnées barycentriques du centre radical des cercles* (A), (B), (C) *vérifient les égalités*

$$\frac{-\alpha + \beta \cot^2 B + \gamma \cot^2 C}{\sin^2 A} = \frac{\alpha \cot^2 A - \beta + \gamma \cot^2 C}{\sin^2 B}$$
$$= \frac{\alpha \cot^2 A + \beta \cot^2 B - \gamma.}{\sin^2 C} \qquad \text{(J. Neuberg.)}$$

Solution par J. Rose. 1° Soit H′ le pied de la hauteur AH, et soit P le pied de l'axe radical des cercles (B), (C) sur BC. On a

$$A'P = \frac{h_b^2 - h_c^2}{2a} \qquad A'H' = \frac{a}{2} - c\cos B = \frac{b\cos C - c\cos B}{2}$$

Digitized by Google

$$\frac{A'P'}{A'H'} = \frac{h_b^2 - h_c^2}{a(b\cos C - c\cos B)} = \frac{a(\sin^2 B - \sin^2 C)}{b\cos C - c\cos B} =$$
$$\frac{\sin A \sin(B+C)\sin(B-C)}{\sin B\cos C - \sin C\cos B} = \sin^2 A.$$

2° On sait que l'axe radical du cercle circonscrit au triangle ABC et d'un cercle quelconque U a pour équation en coordonnées barycentriques

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0,$$

les coefficients u, v, w étant égaux aux puissances des points A, B, C par rapport au cercle U. Pour le cercle (A), par exemple, on a

$$u = -h_a^2,\ v^2 = h_a^2 \cot g^2 B,\ w^2 = h_a^2 \cot g^2 C.$$

Par suite, les axes radicaux des cercles (A), (B), (C) avec le cercle circonscrit ont, tous calculs faits, pour équations

$$\begin{aligned} -\alpha + \beta \cot g^2 B + \gamma \cot g^2 C &= 0, \\ \alpha \cot g^2 A - \beta + \gamma \cot g^2 C &= 0, \\ \alpha \cot g^2 A + \beta \cot g^2 B - \gamma &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Ces droites coupent respectivement les droites $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ sur la droite

$$\alpha \cot^2 A + \beta \cot^2 B + \gamma \cot^2 C = 0. \qquad (1)$$

En combinant par soustraction les équations (1) deux à deux on trouve

$$\frac{\alpha}{\sin^2 A} = \frac{\beta}{\sin^2 B},\ \frac{\beta}{\sin^2 B} = \frac{\gamma}{\sin^2 C},\ \ldots$$

équations de trois droites qui passent par les sommets du triangle ABC et par les sommets du triangle formé par les axes radicaux. Ces droites passent par le point de Lemoine du triangle ABC, qui a pour coordonnées $\sin^2 A$, $\sin^2 B$, $\sin^2 C$. Donc l'axe d'homologie de ces deux triangles est la droite (2) et le centre d'homologie est le point de Lemoine du triangle ABC.

3° Le cercle (A) a pour équation

$$(u\alpha + v\beta + w\gamma)(\alpha + \beta + \gamma) - \Sigma a^2 \beta\gamma = 0,$$

où u, v, w sont les puissances des points A, B, C par rapport à ce cercle, c.-à-d. $u = -h_a^2$, $v = h_a^2 \cot g^2 B$, $w = h_a^2 \cot g^2 C$. Le centre radical des trois cercles (A), (B), (C) étant défini par les équations (A) = (B) = (C), la troisième partie de la question est démontrée.

Des démonstrations analytiques semblables nous ont été adressées par

Digitized by Google

MM. LAMOTTE (Chimay) et VERHEUGEN (Gand). M. LAMOTTE a ajouté à sa solution la note fort intéressante qui va suivre.

NOTE. 1° Désignons par d_a, d_b, d_c les axes radicaux du cercle circonscrit au triangle ABC combiné successivement avec les cercles (A), (B), (C); ces droites sont respectivement perpendiculaires aux lignes des centres OA, OB, OC et par suite sont des antiparallèles tracées dans les angles A, B, C.

2° Soient B_a, C_a les points de rencontre de d_a avec AC, AB; il résulte de l'équation

$$-\alpha+\beta\cotg^2 B+\gamma\cotg^2 C=0$$

de d_a que les points B_a, C_a vérifient les équations $\alpha=\gamma\cot^2 C$, $\alpha=\beta\cotg^2 B$ ou que l'on a

$$\frac{CB_a}{B_aA}=\cot^2 C,\qquad \frac{BC_a}{C_aA}=\cotg^2 B.$$

Or, si H_a est le pied de la hauteur issue de A, et B'_a la projection de H_a sur AC, on a

$$\frac{CB'_a}{B'_aA}=\frac{\overline{H_aC}^2}{\overline{AH_a}^2}=\cotg^2 C;$$

d'où il résulte que d_a joint les projections de H_a sur AC et AB. De même d_b et d_c joignent les projections (C_b, A_b), (A_c, B_c) des points H_b, H_c respectivement sur les côtés adjacents.

3° On sait que les six points B_a, C_a, C_b, A_b, A_c, B_c sont situés sur une même circonférence appelée *circonférence de Taylor;* que les antiparallèles B_aC_a, C_bA_b, A_cB_c joignent les milieux A″, B″, C″ des côtés du triangle orthique $H_aH_bH_c$ et sont égales au périmètre du triangle A″B″C″. De plus $A''B_c=A''C_b=B''C''\ldots$ et les droites C_cC_b, C_aA_c, A_bB_a sont respectivement parallèles à BC, CA, AC.

4° Soient d'_a, d'_b, d'_c les axes radicaux des cercles (A), (B), (C) combinés deux à deux.

Les axes radicaux des cercles (O), (B), (C) combinés deux à deux, c'est-à-dire les droites d_b, d_c, d'_a concourent en un même point A″; donc d'_a est la perpendiculaire abaissée de A″ sur BC. Comme $A''B_c=A''C_b$, d'_a est perpendiculaire au milieu de la corde B_cC_b du cercle de Taylor.

On conclut de là que *le centre radical des cercles* (A), (B), (C) *est le centre du cercle de Taylor.*(*) (LAMOTTE)

(*) Cette note est une contribution intéressante à la géométrie du triangle, que nous n'avions pas soupçonnée en proposant la question 1650. (J. N.)

Digitized by Google

QUESTIONS DE CONCOURS (1907)

Ecole militaire de Belgique.

(*Section d'artillerie et du génie*).

Nous publions ci dessous quelques-unes des questions posées au concours d'admission à la section d'artillerie et du génie de l'école militaire de Bruxelles. Nous insérerons volontiers dans *Mathesis* les solutions de ces questions qui nous seront envoyées.

1 On donne l'équation du second degré en x,

$$px^2 - (2p+q)x + p + 2q = 0.$$

On demande à quelles conditions doivent satisfaire les paramètres réels p, q. pour que les racines de l'équation proposée soient 1° imaginaires ; 2° réelles et égales ; 3° réelles, inégales et positives ; 4° réelles, inégales et négatives ; 5° réelles, inégales et de signes contraires, celle qui a la plus grande valeur étant positive; 6° réelles. inégales et de signes contraires, celle qui a la plus grande valeur absolue étant négative. — Représenter graphiquement la discussion précédente en regardant p et q comme étant les coordonnées d'un point M d'un plan par rapport à deux axes Op, Oq tracés dans ce plan. Indiquer dans quelle région du plan se trouve le point M pour chacun des cas examinés dans la discusion.

2. On donne sur une droite horizontale dd', deux points fixes O et A distants d'une longueur a. On décrit du point O comme centre une circonférence de rayon variable et l'on mène par le point A la tangente AB au dessus de dd'. On trace parallèlement à AB deux cordes CD et C'D' de longueur constante égale à $2b$, et on abaisse du point A la perpendiculaire APP' à AB rencontrant CD en P, C'D' en P'. On demande de déterminer le lieu du point P, celui du point P'. et la condition d'existence de chacun de ces lieux.

3 Une pyramide régulière a pour base un polygone régulier de n côtés, les arêtes laterales ont pour longueur a. Quel angle doivent elles faire entre elles pour que le volume de cette pyramide soit maximum. Examiner le cas particulier où $n = 3$.

4. On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy, deux droites fixes OD, OD', placées symétriquement par rapport à Ox, de coefficient angulaire m,— m; un point A fixe d'abcisse a situé sur Ox et deux points

Digitized by Google

fixes B et B′ symétriquement placés par rapport à Ox, de coordonnées (α, β) et $(\alpha, -\beta)$. On mène par le point A une droite qui rencontre OD en C, OD′ en C′ ; les droites BC, B′C′ se coupent en un point M. 1° Démontrer que le lieu décrit par le point M quand CAC′ tourne autour de A est la conique.

$$\beta(m\alpha - \beta)x^2 + \alpha(\alpha - \alpha)y^2 + \alpha\beta(\beta - m\alpha)x = 0.$$

2° Chercher les positions du point B pour lesquelles le lieu est *a*) du genre parabolique ; *b*) une circonférence ; *c*) une hyperbole équilatère.

×QUESTIONS D'EXAMEN.

1380. Un prisme droit a pour section droite un triangle ABC dont on connait les côtés a, b, c. Par le point A, on fait passer des plans de telle sorte que chacun d'eux coupe le prisme suivant un triangle AB′C′ rectangle en A.

1° Quelle relation existe-t-il entre les segments $BB' = x$, $CC' = y$? 2° Montrer que l'on peut déterminer sur BC deux points M tels que les droites MB′ et MC′ soient toujours rectangulaires. 3° Déterminer le plan AB′C′ de telle façon que, le triangle AB′C′ étant encore rectangle en A, la somme $x + y$ des segments BB′ et CC′ ait une valeur donnée m (Bacc. Math., *Nancy*, 1906).

1° $a^2 + (x - y)^2 = x^2 + c^2 + y^2 + b^2$, ou $2xy = a^2 - b^2 - c^2 = -2bc \cos A$. 2° Si l'on fait $BM = \gamma$, $CM = \beta$, on trouve de la même manière $a^2 + (x - y)^2 = x^2 + \gamma^2 + y^2 + \beta^2$, d'où $xy = a^2 - (\beta^2 + \gamma^2)$; par suite, $\beta^2 + \gamma^2 = b^2 + c^2$, $\beta + \gamma = a$. 3° Si $x + y = m$, x et y sont racines d'une équation du second degré....

1381. La somme des angles d'un quadrilatère gauche est plus petite que quatre angles droits.

1382. Etudier la variation de la fonction

$$y = \mathrm{L}\frac{x-1}{x+2},$$

Lx désignant un logarithme népérien.

(*Ecole polytechnique de Paris*, 1906).

Soit h une quantité positive aussi petite qu'on veut. La fraction $\frac{x-1}{x+2} = \frac{1 - x^{-1}}{1 + 2x^{-1}}$ est positive dans l'intervalle $(-\infty, -2 - h)$ et ses valeurs initiale et finale sont 1, ∞; dans l'intervalle $(-2 + h, 1 - h)$, cette fraction

Digitized by Google

est négative; dans l'intervalle $(1+h, +\infty)$, elle redevient positive en commençant par là valeur 0 et finissant par la valeur 1. En écrivant

$$\frac{x-1}{x+2}=\frac{x+2-3}{x+2}=1-\frac{3}{x+2}, \quad \frac{x+2}{x-1}=1+\frac{3}{x-1},$$

on voit que $\frac{x-1}{x+2}$ croit avec x dans chacun des intervalles $(-\infty, -2-h)$, $(1+h, +\infty)$; il en sera de même de son logarithme. Donc dans le premier intervalle, y croit de 0 à ∞; dans le second, de $-\infty$ à 0.

1383. La somme de treize carrés consécutifs n'est jamais un carré. (BARISIEN)

Si x est le nombre du milieu, l'équation du problème est

$$13x^2+182=u^2;$$

elle est impossible parceque $182=16.13$.

1384. Résoudre l'équation

$$\frac{(b-c)(1+a+a^2)}{x-a}+\frac{(c-a)(1+b+b^2)}{x-b}+\frac{(a-b)(1+c+c^2)}{x-c}=0.$$

(BARISIEN)

Elle se réduit à $x^2+x+1=0$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1661. On considère les cercles qui sont tangents à une parabole fixe et qui passent par son foyer. Montrer que la seconde sécante d'intersection du cercle et de la parabole passe par un point fixe. Trouver le lieu du point d'intersection de cette sécante avec la tangente au point de contact du cercle et de la parabole. (E. N. BARISIEN)

×**1662.** On considère les deux égalités

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0, \quad \frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

Démontrer qui la seconde est une conséquence de le première. La réciproque est-elle vraie ? (NANSON)

1663. Trouver l'enveloppe d'une hyperbole équilatère passant toujours par le centre d'une ellipse E, ayant les asymptotes parallèles aux axes de E et dont le centre décrit E ? (H. WIELEITNER)

1664. On considère deux droites a, b et deux points P et Q quelconques dans l'espace. Un plan variable mené par la droite PQ

Digitized by Google

rencontre a en A et b en B. Les droites PA et QB se coupent en un point C.

1° Le lieu de l'intersection des plans menés par les sommets du triangle ABC perpendiculairement aux côtés opposés est une surface du quatrième ordre à plan directeur.

2° Les hauteurs AA′, BB′ du triangle ABC engendrent des surfaces du 3e ordre, tandis que la hauteur CC′ décrit une surface du 5e ordre.

(DEGUELDRE)

×**1665.** Soient : A′, B′, C′ les symétriques des sommets d'un triangle quelconque ABC par rapport aux côtés opposés; A″B″C″ le triangle dont A′, B′, C′ sont les milieux des côtés; a', b', c' les longueurs des côtés du triangle A′B′C′; H, O l'orthocentre de ABC et le centre du cercle circonscrit; x, y, z, δ les distances OA′, OB′, OC′, OH; x' y' z' les distances OA″, OB″, OC″; S la surface et V l'angle de Brocard du triangle ABC. Démontrer les relations :

$$x^2 = R^2(1 + 8 \sin B \sin B \cos A), \cdots; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2 + 4S \cot V,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \delta^2 = 12R^2, \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 20S \cot V,$$

$$R = \frac{ax}{a'} = \frac{by}{b'} = \frac{cz}{c'}, \quad R = \frac{yz}{x'} = \frac{zx}{y'} = \frac{xy}{z'}.$$

La dernière relation est due M. Mc Vicker. Les suivantes ont déjà figuré dans *Mathesis* (t. III, pp. 48 et 72). (J. N.)

$$\frac{a'^2}{a^2} + \frac{b'^2}{b^2} + \frac{c'^2}{c^2} = 11 + 8 \cos A \cos B \cos C. \qquad \text{(GELIN)}$$

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = 3 + 8 \cos A \cos B \cos C.$$

Rectification. M. C. A. attire notre attention sur la solution de la question d'examen 1878 (p. 47), qui est fausse. Les radicaux ont la même détermination au numérateur et au dénominateur. En multipliant le dénominateur par $\sqrt{-1}$, on trouve le numérateur, de manière que la valeur de l'expression est $\sqrt{-1}$.

L'erreur provient de ce l'on divise les deux termes d'une fraction par $1 + k^2$ et que l'on prend pour k^2 la valeur -1, qui annule ce facteur. Cette détermination de k^2 est exclue, puisqu'elle donne à l'expression à étudier une valeur indéterminée.

Digitized by Google

FORMULES

POUR LA MESURE

DES SURFACES ET DES VOLUMES

300 FORMULES

RELATIVES AUX POLYGONES RÉGULIERS

ET 60 FORMULES

RELATIVES AUX POLYÈDRES RÉGULIERS

PAR

l'Abbé E. GELIN

DOCTEUR EN PHILOSOPHIE ET EN THÉOLOGIE

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU COLLÈGE SAINT-QUIRIN A HUY

NAMUR

LIBRAIRIE WESMAEL-CHARLIER

RUE DE FER, 53

HUY

CHEZ L'AUTEUR

COLLÈGE SAINT-QUIRIN

1908

Tous droits réservés

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES

Formules pour la mesure des surfaces et des volumes 3
Formules relatives aux polygones réguliers 7
Équations des côtés des polygones réguliers. 12
Formules relatives aux polygones réguliers 14

IMPRIMERIE WESMAEL-CHARLIER, RUE DE FER, 53, A NAMUR.

Digitized by Google

FORMULES POUR LA MESURE DES SURFACES ET DES VOLUMES

1. L'aire du *rectangle* est égale au produit de sa base par sa hauteur, ou au produit de ses deux dimensions.

L'aire du *carré* est égale à la seconde puissance ou au *carré* de son côté, ou, en d'autres termes, au produit du côté par lui-même.

L'aire du *parallélogramme* est égale au produit de sa base par sa hauteur.

L'aire du *losange* est égale à la moitié du produit de ses deux diagonales.

2. L'aire du *triangle* est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur.

L'aire du *triangle* est encore égale à la racine carrée du produit de son demi-périmètre par ce demi-périmètre diminué de chacun des côtés.

Soient a, b, c les côtés et $2p$ le périmètre du triangle; on a

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

3. L'aire du *trapèze* est égale au produit de la demi-somme de ses bases par sa hauteur.

4. L'aire du *polygone régulier* est égale au produit de son demi-périmètre par son *apothème*, ou rayon du cercle inscrit.

En particulier, l'aire du *triangle équilatéral*, de côté a, est $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$; celle de l'*hexagone régulier*, de côté a, est $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$.

5. *Le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre est un nombre constant*, que l'on désigne par la lettre grecque π (prononcez *pi*), et qui vaut, approximativement, $\frac{22}{7}$, ou, plus approximativement, 3·1416, ou, plus approximativement encore, 3·141 592 653 589 793...

La *circonférence d'un cercle* est égale au produit de son diamètre par le nombre π, ou, en désignant le rayon du cercle par R, à $2\pi R$.

La surface d'un *cercle* est égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon, ou à πR^2.

La longueur d'un *arc de cercle*, de n degrés, est égale à $2\pi R \times \frac{n}{360}$.

La surface d'un *secteur de cercle*, de n degrés, est égale à $\pi R^2 \times \frac{n}{360}$.

6. La surface de l'*ellipse* est équivalente à celle d'un cercle qui aurait pour diamètre la moyenne proportionnelle entre les deux axes $2a$ et $2b$ de l'ellipse, ou à πab.

7. Le volume du *parallélépipède rectangle* est égal au produit de sa base par sa hauteur, ou au produit de ses trois dimensions.

Le volume du *cube* est égal à la troisième puissance ou au *cube* de son arête.

Le volume du *parallélépipède* ou d'un *prisme* quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur.

Digitized by Google

8. Le volume de la *pyramide* est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

En particulier, le volume du *tétraèdre régulier*, dont l'arête est a, est $\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$.

9. Le volume du *tronc de pyramide*, à bases parallèles, est égal à la somme de trois pyramides qui auraient pour hauteur commune la hauteur du tronc, et, pour bases, la base inférieure du tronc, la base supérieure et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases.

Soient H la hauteur du tronc, B et b les deux bases, A et a deux côtés homologues des bases; on a

$$V = \tfrac{1}{3}H(B + b + \sqrt{Bb}), \quad \text{ou} \quad V = \tfrac{1}{3}BH\left(1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2}\right) = \tfrac{1}{3}bH\left(1 + \frac{A}{a} + \frac{A^2}{a^2}\right).$$

10. Le volume du *tronc de prisme triangulaire* et du *parallélépipède tronqué* est égal au produit de l'une des bases par la moyenne arithmétique des hauteurs abaissées des sommets de l'autre base sur la première.

Il est encore égal au produit de l'aire de la *section droite* du tronc par la moyenne arithmétique des longueurs des arêtes latérales.

11. Le *comble à quatre pentes*, ou le volume qui a pour bases deux rectangles dont les plans sont parallèles et pour faces latérales quatre trapèzes isoscèles, est égal à la somme d'un parallélépipède et d'une pyramide qui auraient pour hauteur commune la hauteur du comble, et, pour bases, un rectangle dont les dimensions seraient, pour le parallélépipède, la demi-somme, et, pour la pyramide, la demi-différence des dimensions des deux bases du comble.

Soient h la hauteur du comble, a et b, a' et b' les dimensions de ses deux bases; on a

$$V = h \cdot \frac{a + a'}{2} \cdot \frac{b + b'}{2} + \tfrac{1}{3}h \cdot \frac{a - a'}{2} \cdot \frac{b - b'}{2},$$

ou, sous une autre forme,

$$V = \tfrac{1}{2}h(ab + a'b') - \tfrac{1}{6}h(a - a')(b - b'),$$

ou

$$V = \tfrac{1}{6}h[b(2a + a') + b'(2a' + a)] = \tfrac{1}{6}h[a(2b + b') + a'(2b' + b)],$$

ou

$$V = \tfrac{1}{6}h[ab + a'b' + (a + a')(b + b')].$$

12. On appelle *prismatoïde* le polyèdre qui a pour bases deux polygones quelconques, situés dans des plans parallèles, et pour faces latérales des triangles ou des trapèzes ayant leurs sommets sur ces deux bases.

Le volume du *prismatoïde* est égal au sixième du produit de sa hauteur par la somme des deux bases et de quatre fois la section faite à égale distance de ces bases.

Soient H la hauteur du prismatoïde, B et B′ les deux bases, S la section équidistante des bases; on a

$$V = \tfrac{1}{6}H(B + B' + 4S).$$

Digitized by Google

Le *prismatoïde* comprend, comme cas particuliers, le *tronc de pyramide*, à bases parallèles, et le *comble à quatre pentes*.

13. Le volume du *cylindre* est égal au produit de son cercle de base par sa hauteur, ou à πR^2H; sa surface latérale, au produit de la circonférence de sa base par sa hauteur, ou à $2\pi RH$; sa surface totale, à $2\pi R(R + H)$.

14. Le volume du *cône* est égal au tiers du produit de son cercle de base par sa hauteur, ou à $\frac{1}{3}\pi R^2H$; sa surface latérale, à la moitié du produit de la circonférence de sa base par son *apothème* ou côté, ou à πRL; sa surface totale, à $\pi R(R + L)$.

15. Le volume du *tronc de cône*, à bases parallèles, est égal à la somme de trois cônes qui auraient pour hauteur commune la hauteur du tronc, et, pour bases, la base inférieure du tronc, la base supérieure et la moyenne proportionnelle entre ces deux bases.

Soient H la hauteur du tronc, R et r les rayons de ses deux bases; on a

$$V = \tfrac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi H[(R + r)^2 - Rr] = \tfrac{1}{3}\pi H[(R - r)^2 + 3Rr] = \tfrac{1}{12}\pi H[3(R + r)^2 + (R - r)^2].$$

La surface latérale du *tronc de cône*, à bases parallèles, est égale au produit de la demi-somme des circonférences de ses deux bases par son apothème ou côté, ou à $\pi L(R + r)$.

16. La surface de la *sphère* est égale à quatre fois la surface d'un cercle qui aurait pour rayon le rayon de la sphère, ou à la surface d'un cercle qui aurait pour rayon le diamètre de la sphère.

Le volume de la *sphère* est égal au produit de sa surface par le tiers du rayon.

Soient R le rayon de la sphère, D son diamètre; on a

$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2, \qquad V = \tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{1}{6}\pi D^3.$$

17. La surface de la *zone* et de la *calotte sphérique* est égale au produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle.

La surface de la *zone* est encore égale à la différence des surfaces des deux cercles qui auraient pour rayons les distances des circonférences des deux bases à leur pôle.

Soient R le rayon de la sphère, H la hauteur de la zone, a et b les distances des circonférences des bases à leur pôle; on a

$$S = 2\pi RH = \pi(a^2 - b^2).$$

18. Le volume de la *tranche sphérique*, ou *segment de sphère*, à bases parallèles, est égal à la demi-somme des bases, multipliée par la hauteur, plus le volume d'une sphère dont cette hauteur serait le diamètre.

Soient r et r' les rayons des deux bases du segment, H sa hauteur; on a

$$V = \tfrac{1}{2}\pi(r^2 + r'^2)H + \tfrac{1}{6}\pi H^3.$$

Digitized by Google

19. On appelle *excès sphérique* l'excès de la somme des trois angles d'un triangle sphérique sur deux angles droits; ou, plus généralement, l'excès de la somme des angles d'un polygone sphérique sur autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux.

Soient E l'excès sphérique, évalué en degrés, et R le rayon de la sphère; on a, pour la surface S du *polygone sphérique* et pour le volume V de la *pyramide sphérique*,

$$S = \tfrac{1}{2}\pi R^2 \times \frac{E}{90}, \qquad V = \tfrac{1}{6}\pi R^3 \times \frac{E}{90}.$$

20. Pour *jauger un tonneau*, c'est-à-dire pour en trouver approximativement la contenance, on l'assimile à un cylindre qui aurait pour hauteur la longueur du tonneau, et, pour diamètre de base, la moyenne entre le diamètre des fonds et le double diamètre du bouge, ou la moyenne entre le triple diamètre des fonds et le quintuple diamètre du bouge.

On peut aussi l'assimiler à un cylindre qui aurait pour hauteur la longueur du tonneau, et, pour cercle de base, la moyenne entre le cercle des fonds et le double cercle du bouge, ou la moyenne entre le quadruple cercle des fonds et le quintuple cercle du bouge.

Soient L la longueur intérieure du tonneau, D le diamètre du douge et d le diamètre des fonds. On a, pour jauger le tonneau, les formules approchées :

$$V_1 = \tfrac{1}{4}\pi L\left(\frac{2D+d}{3}\right)^2, \quad V_2 = \tfrac{1}{4}\pi L\left(\frac{5D+3d}{8}\right)^2,$$

$$V_3 = \tfrac{1}{4}\pi L\left(\frac{2D^2+d^2}{3}\right), \quad V_4 = \tfrac{1}{4}\pi L\left(\frac{5D^2+4d^2}{9}\right).$$

Le volume d'un tonneau est encore égal, approximativement, aux $\frac{8}{10}$ du produit de sa longueur par le diamètre du bouge et par le diamètre des fonds, ou à $\frac{8}{10}LDd$.

21. Le volume d'un *tronc d'arbre*, en grume ou non écorcé, est égal à sa section moyenne multipliée par sa longueur. Pour avoir la section moyenne, on peut prendre huit fois le carré du dixième de la circonférence moyenne.

Pour les bois à ouvrer, on déduit 45 pour cent du volume de l'arbre en grume, s'il s'agit de bois équarris grossièrement, ou 50 pour cent, s'il s'agit de bois purgés d'aubier et équarris à vive arête. On peut aussi faire le carré du quart de la circonférence moyenne, préalablement diminuée d'un sixième ou d'un cinquième.

22. La surface du *tore*, ou *anneau*, est égale à la circonférence du cercle générateur, multipliée par la circonférence qui a pour rayon la distance du centre de ce cercle au centre de l'anneau, ou à $4\pi^2 rd$.

Le volume du *tore* est égal à sa surface multipliée par la moitié du rayon du cercle générateur, ou à $2\pi^2 r^2 d$.

Digitized by Google

FORMULES RELATIVES AUX POLYGONES RÉGULIERS

23. Notations.

a ou a_n côté du polygone régulier de n côtés;
R rayon du cercle circonscrit au polygone;
r apothème ou rayon du cercle inscrit;
S ou S_n aire du polygone;
S_1 et V_1 surface et volume engendrés par un demi-polygone régulier, d'un nombre pair de côtés, tournant autour d'un axe passant par deux sommets opposés;
S_2 et V_2 surface et volume engendrés par un demi-polygone régulier, d'un nombre pair de côtés, tournant autour d'un axe passant par les milieux de deux côtés opposés;
S_3 et V_3 surface et volume engendrés par un demi-polygone régulier, d'un nombre impair de côtés, tournant autour d'un axe passant par un sommet et le milieu du côté opposé;
S_4 et V_4 surface et volume engendrés par un polygone régulier tournant autour de l'un de ses côtés;
S_5 et V_5 surface et volume engendrés par un polygone régulier tournant autour de la tangente menée par l'un de ses sommets au cercle circonscrit.

24. Formules générales.

$$R^2 = r^2 + \frac{a^2}{4},$$

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_n^2}},$$

$$a_n = \frac{a_{2n}}{R}\sqrt{4R^2 - a_{2n}^2},$$

$$S = \tfrac{1}{2} nar,$$

$$S_{2n} = \tfrac{1}{2} na_n R.$$

$$S_1 = 4\pi Rr, \qquad V_1 = \tfrac{4}{3}\pi Rr^2,$$

$$S_2 = 2\pi(R^2 + r^2), \qquad V_2 = \tfrac{2}{3}\pi r(R^2 + r^2),$$

$$S_3 = \pi(R + r)^2, \qquad V_3 = \tfrac{1}{3}\pi r(R + r)^2,$$

$$S_4 = 2n\pi ar, \qquad V_4 = n\pi ar^2,$$

$$S_5 = 2n\pi aR, \qquad V_5 = n\pi aRr,$$

25. Triangle équilatéral.

$$a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3},$$

$$R = \tfrac{1}{3} a\sqrt{3} = 2r,$$

$$r = \tfrac{1}{6} a\sqrt{3} = \tfrac{1}{2} R,$$

$$S = \tfrac{1}{4} a^2\sqrt{3} = \tfrac{3}{4} R^2\sqrt{3} = 3r^2\sqrt{3},$$

Digitized by Google

$$S_3 = \tfrac{3}{4}\pi a^2 \qquad = \tfrac{9}{4}\pi R^2 \qquad = 9\pi r^2,$$
$$V_3 = \tfrac{1}{24}\pi a^3\sqrt{3} \qquad = \tfrac{3}{8}\pi R^3 \qquad = 3\pi r^3,$$
$$S_4 = \pi a^2\sqrt{3} \qquad = 3\pi R^2\sqrt{3} \qquad = 12\pi r^2\sqrt{3},$$
$$V_4 = \tfrac{1}{4}\pi a^3 \qquad = \tfrac{3}{4}\pi R^3\sqrt{3} \qquad = 6\pi r^3\sqrt{3},$$
$$S_5 = 2\pi a^2\sqrt{3} \qquad = 6\pi R^2\sqrt{3} \qquad = 24\pi r^2\sqrt{3},$$
$$V_5 = \tfrac{1}{2}\pi a^3 \qquad = \tfrac{3}{2}\pi R^3\sqrt{3} \qquad = 12\pi r^3\sqrt{3}.$$

26. Carré.

$$a = R\sqrt{2} \qquad = 2r,$$
$$R = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} \qquad = r\sqrt{2},$$
$$r = \tfrac{1}{2}a \qquad = \tfrac{1}{2}R\sqrt{2},$$
$$S = a^2 \qquad = 2R^2 \qquad = 4r^2,$$
$$S_1 = \pi a^2\sqrt{2} \qquad = 2\pi R^2\sqrt{2} \qquad = 4\pi r^2\sqrt{2},$$
$$V_1 = \tfrac{1}{6}\pi a^3\sqrt{2} \qquad = \tfrac{2}{3}\pi R^3 \qquad = \tfrac{4}{3}\pi r^3\sqrt{2},$$
$$S_2 = \tfrac{3}{2}\pi a^2 \qquad = 3\pi R^2 \qquad = 6\pi r^2,$$
$$V_2 = \tfrac{1}{4}\pi a^3 \qquad = \tfrac{1}{2}\pi R^3\sqrt{2} \qquad = 2\pi r^3,$$
$$S_4 = 4\pi a^2 \qquad = 8\pi R^2 \qquad = 16\pi r^2,$$
$$V_4 = \pi a^3 \qquad = 2\pi R^3\sqrt{2} \qquad = 8\pi r^3,$$
$$S_5 = 4\pi a^2\sqrt{2} \qquad = 8\pi R^2\sqrt{2} \qquad = 16\pi r^3\sqrt{2},$$
$$V_5 = \pi a^3\sqrt{2} \qquad = 4\pi R^3 \qquad = 8\pi r^3\sqrt{2}.$$

27. Pentagone régulier.

$$a = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 2r\sqrt{5 - 2\sqrt{5}},$$
$$R = \tfrac{1}{10}a\sqrt{50 + 10\sqrt{5}} = r(\sqrt{5} - 1),$$
$$r = \tfrac{1}{10}a\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{5} + 1),$$
$$S = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \qquad = \tfrac{5}{8}R^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \qquad = 5r^2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}},$$
$$S_3 = \tfrac{1}{4}\pi a^2(5 + 2\sqrt{5}) \qquad = \tfrac{5}{8}\pi R^2(3 + \sqrt{5}) \qquad = 5\pi r^2,$$
$$V_3 = \tfrac{1}{24}\pi a^3\sqrt{85 + 38\sqrt{5}} = \tfrac{5}{24}\pi R^3(\sqrt{5} + 2) \qquad = \tfrac{5}{3}\pi r^3,$$
$$S_4 = \pi a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \qquad = \tfrac{5}{2}\pi R^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \qquad = 20\pi r^2\sqrt{5 - 2\sqrt{5}},$$
$$V_4 = \tfrac{1}{4}\pi a^3(5 + 2\sqrt{5}) \qquad = \tfrac{5}{4}\pi R^3\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \qquad = 10\pi r^3\sqrt{5 - 2\sqrt{5}},$$
$$S_5 = \pi a^2\sqrt{50 + 10\sqrt{5}} \qquad = 5\pi R^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \qquad = 20\pi r^2\sqrt{50 - 22\sqrt{5}},$$
$$V_5 = \tfrac{1}{4}\pi a^3(3\sqrt{5} + 5) \qquad = \tfrac{5}{4}\pi R^3\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \qquad = 10\pi r^3\sqrt{50 - 22\sqrt{5}}.$$

Digitized by Google

28. Hexagone régulier.

$$a = R = \tfrac{2}{3} r\sqrt{3}, \qquad r = \tfrac{1}{2} a\sqrt{3} = \tfrac{1}{2} R\sqrt{3},$$

$$S = \tfrac{3}{2} a^2\sqrt{3} = \tfrac{3}{2} R^2\sqrt{3} = 2r^2\sqrt{3},$$

$$S_1 = 2\pi a^2\sqrt{3} = 2\pi R^2\sqrt{3} = \tfrac{8}{3}\pi r^2\sqrt{3},$$

$$V_1 = \pi a^3 = \pi R^3 = \tfrac{8}{9}\pi r^3\sqrt{3},$$

$$S_2 = \tfrac{7}{2}\pi a^2 = \tfrac{7}{2}\pi R^2 = \tfrac{14}{3}\pi r^2,$$

$$V_2 = \tfrac{7}{12}\pi a^3\sqrt{3} = \tfrac{7}{12}\pi R^2\sqrt{3} = \tfrac{14}{9}\pi r^3,$$

$$S_4 = 6\pi a^2\sqrt{3} = 6\pi R^2\sqrt{3} = 8\pi r^2\sqrt{3},$$

$$V_4 = \tfrac{9}{2}\pi a^3 = \tfrac{9}{2}\pi R^3 = 4\pi r^3\sqrt{3},$$

$$S_5 = 12\pi a^2 = 12\pi R^2 = 16\pi r^2,$$

$$V_5 = 3\pi a^3\sqrt{3} = 3\pi R^3\sqrt{3} = 8\pi r^3.$$

29. Octogone régulier.

$$a = R\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2r(\sqrt{2}-1),$$

$$R = \tfrac{1}{2} a\sqrt{4+2\sqrt{2}} = r\sqrt{4-2\sqrt{2}},$$

$$r = \tfrac{1}{2} a(\sqrt{2}+1) = \tfrac{1}{2} R\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$S = 2a^2(\sqrt{2}+1) = 2R^2\sqrt{2} = 8r^2(\sqrt{2}-1),$$

$$S_1 = \pi a^2\sqrt{20+14\sqrt{2}} = 2\pi R^2\sqrt{2+\sqrt{2}} = 4\pi r^2\sqrt{4-2\sqrt{2}},$$

$$V_1 = \tfrac{1}{6}\pi a^3\sqrt{116+82\sqrt{2}} = \tfrac{1}{3}\pi R^3(2+\sqrt{2}) = \tfrac{4}{3}\pi r^3\sqrt{4-2\sqrt{2}},$$

$$S_2 = \tfrac{1}{2}\pi a^2(7+4\sqrt{2}) = \tfrac{1}{2}\pi R^2(6+\sqrt{2}) = 2\pi r^2(5-2\sqrt{2}),$$

$$V_2 = \tfrac{1}{12}\pi a^3(11\sqrt{2}+15) = \tfrac{1}{12}\pi R^3\sqrt{100+62\sqrt{2}} = \tfrac{2}{3}\pi r^3(5-2\sqrt{2}),$$

$$S_4 = 8\pi a^2(\sqrt{2}+1) = 8\pi R^2\sqrt{2} = 32\pi r^2(\sqrt{2}-1),$$

$$V_4 = 2\pi a^3(3+2\sqrt{2}) = 2\pi R^3\sqrt{4+2\sqrt{2}} = 16\pi r^3(\sqrt{2}-1),$$

$$S_5 = 8\pi a^2\sqrt{4+2\sqrt{2}} = 16\pi R^2\sqrt{2-\sqrt{2}} = 32\pi r^2\sqrt{20-14\sqrt{2}},$$

$$V_5 = 2\pi a^3\sqrt{20+14\sqrt{2}} = 4\pi R^3\sqrt{2} = 16\pi r^3\sqrt{20-14\sqrt{2}}.$$

30. Décagone régulier.

$$a = \tfrac{1}{2} R(\sqrt{5}-1) = \tfrac{2}{5} r\sqrt{25-10\sqrt{5}},$$

$$R = \tfrac{1}{2} a(\sqrt{5}+1) = \tfrac{1}{5} r\sqrt{50-10\sqrt{5}},$$

$$r = \tfrac{1}{2} a\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \tfrac{1}{4} R\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

Digitized by Google

$$S = \tfrac{5}{2}a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \tfrac{5}{4}R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}},$$
$$S_1 = \pi a^2\sqrt{50+22\sqrt{5}} = \pi R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}} = \tfrac{4}{5}\pi r^2\sqrt{50-10\sqrt{5}},$$
$$V_1 = \tfrac{1}{6}\pi a^3(7\sqrt{5}+15) = \tfrac{1}{6}\pi R^3(5+\sqrt{5}) = \tfrac{4}{15}\pi r^3\sqrt{50-10\sqrt{5}},$$
$$S_2 = \tfrac{1}{2}\pi a^2(11+4\sqrt{5}) = \tfrac{1}{4}\pi R^2(13+\sqrt{5}) = \tfrac{2}{5}\pi r^2(15-2\sqrt{5}),$$
$$V_2 = \tfrac{1}{12}\pi a^3\sqrt{1885+842\sqrt{5}} = \tfrac{1}{12}\pi R^3\sqrt{125+38\sqrt{5}} = \tfrac{2}{15}\pi r^3(15-2\sqrt{5}),$$
$$S_4 = 10\pi a^2\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 5\pi R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 8\pi r^2\sqrt{25-10\sqrt{5}},$$
$$V_4 = \tfrac{5}{2}\pi a^3(5+2\sqrt{5}) = \tfrac{5}{2}\pi R^3\sqrt{5} = 4\pi r^3\sqrt{25-10\sqrt{5}},$$
$$S_5 = 10\pi a^2(\sqrt{5}+1) = 10\pi R^2(\sqrt{5}-1) = 8\pi r^2(3\sqrt{5}-5),$$
$$V_5 = \tfrac{5}{2}\pi a^3\sqrt{50+22\sqrt{5}} = \tfrac{5}{2}\pi R^3\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 4\pi r^3(3\sqrt{5}-5).$$

31. Dodécagone régulier.

$$a = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 2r(2-\sqrt{3}),$$
$$R = \tfrac{1}{2}a(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = r(\sqrt{6}-\sqrt{2}),$$
$$r = \tfrac{1}{2}a(2+\sqrt{3}) = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{6}+\sqrt{2}),$$
$$S = 3a^2(2+\sqrt{3}) = 3R^2 = 12r^2(2-\sqrt{3}),$$
$$S_1 = \pi a^2(3\sqrt{6}+5\sqrt{2}) = \pi R^2(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = 4\pi r^2(\sqrt{6}-\sqrt{2}),$$
$$V_1 = \tfrac{1}{6}\pi a^3(11\sqrt{6}+19\sqrt{2}) = \tfrac{1}{3}\pi R^3(2+\sqrt{3}) = \tfrac{4}{3}\pi r^3(\sqrt{6}-\sqrt{2}),$$
$$S_2 = \tfrac{1}{2}\pi a^2(15+8\sqrt{3}) = \tfrac{1}{2}\pi R^2(6+\sqrt{3}) = 2\pi r^2(9-4\sqrt{3}),$$
$$V_2 = \tfrac{1}{12}\pi a^3(54+31\sqrt{3}) = \tfrac{1}{24}\pi R^3(7\sqrt{6}+9\sqrt{2}) = \tfrac{2}{3}\pi r^3(9-4\sqrt{3}),$$
$$S_4 = 12\pi a^2(2+\sqrt{3}) = 12\pi R^2 = 48\pi r^2(2-\sqrt{3}),$$
$$V_4 = 3\pi a^3(7+4\sqrt{3}) = \tfrac{3}{2}\pi R^3(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = 24\pi r^3(2-\sqrt{3}),$$
$$S_5 = 12\pi a^2(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = 12\pi R^2(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 48\pi r^2(3\sqrt{6}-5\sqrt{2}),$$
$$V_5 = 3\pi a^3(3\sqrt{6}+5\sqrt{2}) = 6\pi R^3 = 24\pi r^3(3\sqrt{6}-5\sqrt{2}).$$

32. Pentédécagone régulier.

$$a = \tfrac{1}{4}R(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}) = r(3\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{50-22\sqrt{5}}),$$
$$R = \tfrac{1}{2}a(\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}) = r(\sqrt{15-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+2),$$
$$r = \tfrac{1}{4}a(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}+\sqrt{3}) = \tfrac{1}{8}R(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1),$$
$$S = \tfrac{15}{8}a^2(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}+\sqrt{3})$$
$$= \tfrac{15}{16}R^2(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}})$$
$$= \tfrac{15}{2}r^2(3\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{50-22\sqrt{5}}),$$

Digitized by Google

$$S_3 = \tfrac{1}{4}\pi a^2\left(23+10\sqrt{5}+2\sqrt{255+114\sqrt{5}}\right)$$
$$= \tfrac{1}{16}\pi R^2\left(21+5\sqrt{5}+\sqrt{510+186\sqrt{5}}\right)$$
$$= \pi r^2\left(29-12\sqrt{5}+2\sqrt{390-174\sqrt{5}}\right),$$
$$V_3 = \tfrac{1}{48}\pi a^3\left(123\sqrt{3}+55\sqrt{15}+\sqrt{90610+40522\sqrt{5}}\right)$$
$$= \tfrac{1}{96}\pi R^3\left(31+13\sqrt{5}+\sqrt{1950+870\sqrt{5}}\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi r^3\left(29-12\sqrt{5}+2\sqrt{390-174\sqrt{5}}\right),$$
$$S_4 = \tfrac{15}{2}\pi a^2\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)$$
$$= \tfrac{15}{4}\pi R^2\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$$
$$= 30\pi r^2\left(3\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{50-22\sqrt{5}}\right),$$
$$V_4 = \tfrac{15}{4}\pi a^3\left(7+2\sqrt{5}+2\sqrt{15+6\sqrt{5}}\right)$$
$$= \tfrac{15}{16}\pi R^3\left(\sqrt{50+10\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)$$
$$= 15\pi r^3\left(3\sqrt{3}-\sqrt{15}-\sqrt{50-22\sqrt{5}}\right),$$
$$S_5 = 15\pi a^2\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}+\sqrt{3}\right)$$
$$= \tfrac{15}{2}\pi R^2\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)$$
$$= 60\pi r^2\left(\sqrt{1025-458\sqrt{5}}-6\sqrt{15}+13\sqrt{3}\right),$$
$$V_5 = \tfrac{15}{4}\pi a^3\left(4+3\sqrt{5}+\sqrt{75+30\sqrt{5}}\right)$$
$$= \tfrac{15}{8}\pi R^3\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$$
$$= 30\pi r^3\left(\sqrt{1025-458\sqrt{5}}-6\sqrt{15}+13\sqrt{3}\right).$$

33. Polygone régulier de 20 côtés.

$$a = \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right) = 2r\left(\sqrt{5}+1-\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right),$$
$$R = \tfrac{1}{4}a\left(3\sqrt{2}+\sqrt{10}+2\sqrt{5+\sqrt{5}}\right) = \tfrac{1}{2}r\left(3\sqrt{2}+\sqrt{10}-2\sqrt{5+\sqrt{5}}\right),$$
$$r = \tfrac{1}{2}a\left(\sqrt{5}+1+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right) = \tfrac{1}{8}R\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}+2\sqrt{5-\sqrt{5}}\right),$$
$$S = \tfrac{5}{2}R^2\left(\sqrt{5}-1\right).$$

34. Polygone régulier de 30 côtés.

$$a = \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1\right) = r\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right),$$
$$R = \tfrac{1}{2}a\left(\sqrt{15+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+2\right) = r\left(\sqrt{3}-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right),$$
$$r = \tfrac{1}{4}a\left(\sqrt{15}+3\sqrt{3}+\sqrt{50+22\sqrt{5}}\right) = \tfrac{1}{8}R\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{15}+\sqrt{3}\right),$$
$$S = \tfrac{15}{8}R^2\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right).$$

Digitized by Google

35. Polygones réguliers de 40, 60, 17 et 34 côtés.

$$a_{40} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{8-2\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}$$
$$= \tfrac{1}{4}R\left[\sqrt{(2-\sqrt{2})(10+2\sqrt{5})} - \sqrt{(2+\sqrt{2})(6-2\sqrt{5})}\right],$$
$$r = \tfrac{1}{4}R\sqrt{8+2\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}$$
$$= \tfrac{1}{8}R\left[\sqrt{(2+\sqrt{2})(10+2\sqrt{5})} + \sqrt{(2-\sqrt{2})(6-2\sqrt{5})}\right],$$
$$S = 5R^2\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \tfrac{5}{2}R^2(\sqrt{10}+\sqrt{2}-2\sqrt{5-\sqrt{5}});$$

$$a_{60} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{8-\sqrt{15}-\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$
$$= \tfrac{1}{8}R\left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right],$$
$$r = \tfrac{1}{4}R\sqrt{8+\sqrt{15}+\sqrt{3}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$
$$= \tfrac{1}{16}R\left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)\right],$$
$$S = \tfrac{15}{2}R^2\sqrt{9-\sqrt{5}-\sqrt{30+6\sqrt{5}}} = \tfrac{15}{4}R^2(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1);$$

$$a_{17} = \tfrac{1}{4}R\sqrt{34-2\sqrt{17}-2\sqrt{34-2\sqrt{17}}-4\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}},$$
$$a_{34} = \tfrac{1}{8}R\left(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\right).$$

ÉQUATIONS DES COTÉS DES POLYGONES RÉGULIERS

36. Le côté $x = a_n$ d'un polygone régulier de n côtés, n impair, inscrit dans un cercle de rayon $R = 1$, est donné par l'équation

$$\frac{(\frac{1}{2}x+\sqrt{-1}\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2})^n + (\frac{1}{2}x-\sqrt{-1}\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2})^n}{x} = 0,$$

ou

$$x^{n-1} - \frac{n}{1}x^{n-3} + \frac{n(n-3)}{1.2}x^{n-5} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}x^{n-7} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}x^{n-9}$$
$$- \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.2.3.4.5}x^{n-11} + \ldots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}n = 0.$$

On a, par exemple, pour les équations des côtés des polygones réguliers inscrits de 5, 7, 11, 13, 17, 19 ... côtés :

$x = a_5$ $\quad x^4 - 5x^2 + 5 = 0,$
$x = a_7$ $\quad x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = 0,$
$x = a_{11}$ $\quad x^{10} - 11x^8 + 44x^6 - 77x^4 + 55x^2 - 11 = 0,$
$x = a_{13}$ $\quad x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 156x^6 + 182x^4 - 91x^2 + 13 = 0.$

Digitized by Google

$$x = a_{17} \quad x^{16} - 17x^{14} + 119x^{12} - 442x^{10} + 935x^8 - 1122x^6 + 714x^4 - 204x^2 + 17 = 0,$$

$$x = a_{19} \quad x^{18} - 19x^{16} + 152x^{14} - 665x^{12} + 1729x^{10} - 2717x^8 + 2508x^6 - 1254x^4 + 285x^2 - 19 = 0,$$

. . . . . .

37. Le côté $x = a_{2n}$ d'un polygone régulier de $2n$ côtés, n impair, inscrit dans un cercle de rayon $R = 1$, est donné par l'équation

$$\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}x + \sqrt{-1}\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2})^n + (\frac{1}{2}x - \sqrt{-1}\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2})^n - 2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{x - 2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}} = 0,$$

ou, en posant $n = 2m + 1$,

$$\left[x^m - \frac{m-1}{1}x^{m-2} + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}x^{m-4} - \frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3}x^{m-6} + \ldots\right]$$
$$+(-1)^m\left[x^{m-1} - \frac{m-2}{1}x^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}x^{m-5} - \frac{(m-4)(m-5)(m-6)}{1.2.3}x^{m-7} + \ldots\right] = 0.$$

On a, par exemple, pour les équations des côtés des polygones réguliers inscrits de 10, 14, 22, 26, 34, 38 ... côtés :

$$x = a_{10} \quad x^2 + x - 1 = 0,$$
$$x = a_{14} \quad x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0,$$
$$x = a_{22} \quad x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0,$$
$$x = a_{26} \quad x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1 = 0,$$
$$x = a_{34} \quad x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1 = 0,$$
$$x = a_{38} \quad x^9 - x^8 - 8x^7 + 7x^6 + 21x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 10x^2 + 5x - 1 = 0,$$

. . . . . .

38. Le côté $x = a_{mn}$ d'un polygone régulier de mn côtés, n impair, inscrit dans un cercle de rayon $R = 1$, en fonction du côté a_m du polygone régulier de m côtés, inscrit dans le même cercle, est donné par l'équation

$$(\tfrac{1}{2}x + \sqrt{-1}\sqrt{1-\tfrac{1}{4}x^2})^n + (\tfrac{1}{2}x - \sqrt{-1}\sqrt{1-\tfrac{1}{4}x^2})^n - (-1)^{\frac{n-1}{2}}a_m = 0,$$

ou

$$x^n - \frac{n}{1}x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}x^{n-6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}x^{n-8}$$
$$- \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.2.3.4.5}x^{n-10} + \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}nx - (-1)^{\frac{n-1}{2}}a_m = 0.$$

On a, par exemple, pour les équations des côtés des polygones réguliers inscrits de $3m$, $5m$, $7m$, $9m$, $11m$, $13m$ ... côtés :

$$x = a_{3m} \quad x^3 - 3x + a_m = 0,$$
$$x = a_{5m} \quad x^5 - 5x^3 + 5x - a_m = 0,$$

Digitized by Google

$$x = a_{7m} \quad x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x + a_m = 0,$$
$$x = a_{9m} \quad x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x - a_m = 0,$$
$$x = a_{11m} \quad x^{11} - 11x^9 + 44x^7 - 77x^5 + 55x^3 - 11x + a_m = 0,$$
$$x = a_{13m} \quad x^{13} - 13x^{11} + 65x^9 - 156x^7 + 182x^5 - 91x^3 + 13x - a_m = 0,$$

. . . . . .

Si n est pair, le côté $x = a_{mn}$ est donné par l'équation

$$(\tfrac{1}{2}x + \sqrt{-1}\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}x^2})^{2n} + (\tfrac{1}{2}x - \sqrt{-1}\sqrt{1 - \tfrac{1}{4}x^2})^{2n} + a^2{}_m - 2 = 0,$$

ou

$$x^{2n} - \frac{2n}{1}x^{2n-2} + \frac{2n(2n-3)}{1.2}x^{2n-4} - \frac{2n(2n-4)(2n-5)}{1.2.3}x^{2n-6}$$
$$+ \frac{2n(2n-5)(2n-6)(2n-7)}{1.2.3.4}x^{2n-8} - \ldots - n^2x^2 + a^2{}_m = 0.$$

On a, par exemple, pour les équations des côtés des polygones réguliers inscrits de $2m$, $4m$, $6m$, $8m$, $10m$ ... côtés :

$$x = a_{2m} \quad x^4 - 4x^2 + a^2{}_m = 0,$$
$$x = a_{4m} \quad x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + a^2{}_m = 0,$$
$$x = a_{6m} \quad x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36x^2 + a^2{}_m = 0,$$
$$x = a_{8m} \quad x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10} + 660x^8 - 672x^6 + 336x^4 - 64x^2 + a^2{}_m = 0,$$
$$x = a_{10m} \quad x^{20} - 20x^{18} + 170x^{16} - 800x^{14} + 2275x^{12} - 4004x^{10}$$
$$+ 4290x^8 - 2640x^6 + 825x^4 - 100x^2 + a^2{}_m = 0,$$

. . . . . .

FORMULES RELATIVES AUX POLYÈDRES RÉGULIERS

39. Notations.

a	arête d'un polyèdre régulier ;
R	rayon de la sphère circonscrite ;
r	rayon de la sphère inscrite ;
S	surface du polyèdre ;
V	volume du polyèdre.

40. Tétraèdre régulier.

$$a = \tfrac{2}{3}R\sqrt{6} = 2r\sqrt{6},$$
$$R = \tfrac{1}{4}a\sqrt{6} = 3r,$$
$$r = \tfrac{1}{12}a\sqrt{6} = \tfrac{1}{3}R,$$
$$S = a^2\sqrt{3} = \tfrac{8}{3}R^2\sqrt{3} = 24r^2\sqrt{3},$$
$$V = \tfrac{1}{12}a^3\sqrt{2} = \tfrac{8}{27}R^3\sqrt{3} = 8r^3\sqrt{3}.$$

Digitized by Google

41. Cube ou hexaèdre régulier.

$$
\begin{aligned}
a &= \tfrac{2}{3}R\sqrt{3} = 2r,\\
R &= \tfrac{1}{2}a\sqrt{3} = r\sqrt{3},\\
r &= \tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{3}R\sqrt{3},\\
S &= 6a^2 = 8R^2 = 24r^2,\\
V &= a^3 = \tfrac{8}{9}R^3\sqrt{3} = 8r^3.
\end{aligned}
$$

42. Octaèdre régulier.

$$
\begin{aligned}
a &= R\sqrt{2} = r\sqrt{6},\\
R &= \tfrac{1}{2}a\sqrt{2} = r\sqrt{3},\\
r &= \tfrac{1}{6}a\sqrt{6} = \tfrac{1}{3}R\sqrt{3},\\
S &= 2a^2\sqrt{3} = 4R^2\sqrt{3} = 12r^2\sqrt{3},\\
V &= \tfrac{1}{3}a^3\sqrt{2} = \tfrac{4}{3}R^3 = 4r^3\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

43. Dodécaèdre régulier.

$$
\begin{aligned}
a &= \tfrac{1}{3}R(\sqrt{15}-\sqrt{3}) = r\sqrt{50-22\sqrt{5}},\\
R &= \tfrac{1}{4}a(\sqrt{15}+\sqrt{3}) = r\sqrt{15-6\sqrt{5}},\\
r &= \tfrac{1}{20}a\sqrt{250+110\sqrt{5}} = \tfrac{1}{15}R\sqrt{75+30\sqrt{5}},\\
S &= 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}} = 2R^2\sqrt{50-10\sqrt{5}} = 30r^2\sqrt{130-58\sqrt{5}},\\
V &= \tfrac{1}{4}a^3(7\sqrt{5}+15) = \tfrac{2}{9}R^3(5\sqrt{3}+\sqrt{15}) = 10r^3\sqrt{130-58\sqrt{5}}.
\end{aligned}
$$

44. Icosaèdre régulier.

$$
\begin{aligned}
a &= \tfrac{1}{5}R\sqrt{50-10\sqrt{5}} = r(3\sqrt{3}-\sqrt{15}),\\
R &= \tfrac{1}{4}a\sqrt{10+2\sqrt{5}} = r\sqrt{15-6\sqrt{5}},\\
r &= \tfrac{1}{12}a(3\sqrt{3}+\sqrt{15}) = \tfrac{1}{15}R\sqrt{75+30\sqrt{5}},\\
S &= 5a^2\sqrt{3} = 2R^2(5\sqrt{3}-\sqrt{15}) = 30r^2(7\sqrt{3}-3\sqrt{15}),\\
V &= \tfrac{5}{12}a^3(3+\sqrt{5}) = \tfrac{2}{3}R^3\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 10r^3(7\sqrt{3}-3\sqrt{15}).
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

Ouvrages de M. l'Abbé GELIN

Professeur au Collège Saint-Quirin à Huy

Traité d'Arithmétique élémentaire, à l'usage des élèves des Cours professionnels, des candidats aux Écoles spéciales des Universités et à l'École militaire de Bruxelles. **Ouvrage couronné par l'Académie royale de Belgique,** *adopté et spécialement recommandé par le Conseil de perfectionnement de l'enseignement moyen.* — Prix : 5f.

Précis d'Arithmétique élémentaire, à l'usage des Écoles moyennes, des Cours professionnels, des Écoles normales et des classes d'Humanités. *Ouvrage adopté par le Conseil de perfectionnement de l'enseignement moyen.* — Prix : 3f.

Recueil de problèmes d'Arithmétique. — Prix : 2f.

Traité de la résolution des problèmes, extrait du *Traité d'Arithmétique élémentaire.* — Prix : 1f.

Ce *Traité* renferme les solutions raisonnées de 175 problèmes-types.

Kort begrip der Rekenkunde, in vier deelen. *Ouvrage adopté par le Conseil de perfectionnement de l'enseignement moyen.* — Prix de chaque partie, 0·75f; des quatre parties réunies, 3f.

Traité de Trigonométrie plane et sphérique, à l'usage des élèves des Cours professionnels, des candidats aux Écoles spéciales des Universités et à l'École militaire de Bruxelles. **Ouvrage couronné par l'Académie royale de Belgique,** *adopté et spécialement recommandé par le Conseil de perfectionnement de l'enseignement moyen.* — Prix : 5f.

Précis de Trigonométrie rectiligne, à l'usage des élèves des classes d'Humanités et des candidats au diplôme de géomètre-arpenteur. *Ouvrage adopté par le Conseil de perfectionnement de l'enseignement moyen.* — Prix : 1·50f.

Recueil de Tables numériques. — Prix du premier fascicule, 1f; du deuxième fascicule, 1·25f; du troisième fascicule, 0·75f; des trois fascicules réunis, 3f.

Sommaire du premier fascicule. — I. Table des nombres premiers jusqu'à 10 000. — II. Table des nombres composés jusqu'à 10 000. — IV. Table des carrés et des cubes des 1000 premiers nombres.

Sommaire du deuxième fascicule. — V. Table des racines carrées (à 15 décimales) et des racines cubiques (à 10 décimales) des 100 premiers nombres. — VI. Table des puissances successives des 100 premiers nombres. — VII. Table pour le calcul des intérêts composés et des annuités (cette table est à 7 décimales; elle comprend 21 taux et s'étend jusqu'à 50 ans). — VIII et IX. Mesures métriques. — XI et XII. Poids, titres et valeurs au pair des monnaies d'or et d'argent des principaux pays.

Sommaire du troisième fascicule. — XVII. Mesures anciennes de Belgique.

Questions d'Arithmologie. — Prix : 0·50f.

Caractères de divisibilité. — Prix : 0·50f.

Formules pour la mesure des surfaces et des volumes, plus 300 formules relatives aux polygones réguliers et 60 formules relatives aux polyèdres réguliers. — Prix : 0·50f.

Surface et volume du tore. — Prix : 0·50f.

Programme des connaissances exigées pour l'examen de géomètre-arpenteur, suivi d'un recueil de questions proposées à divers examens. — Prix : 0·25f.

Pour recevoir franco les ouvrages qui précèdent, en adresser la demande, accompagnée du montant des prix marqués, à **M. l'Abbé GELIN, à HUY.**

Digitized by Google

EN VENTE CHEZ LES MÊMES LIBRAIRES

H. Schuermans. Développement d'une puissance quelconque d'un polynome. Gand, Vanderpoorten. 1908. (In-folio de 81 pp.) . . . . . fr. 6 00

V. v. Dantscher. Vorlesungen über die Weierstrassche Theorie der Irrationalen Zahlen. LT, 1908 (In-8, de VI-80 pp.) . . . . . marcs 2 80

A. Schoenflies. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Zweiter Teil. LT, 1908 (In-8 de X-330 pp.) . . . . . marcs 12 00

H. Grassmanns gesammelte Werke. II. Band. I. Theil. Die Abhandlungen zur Geometrie and Analysis, LT, 1904 (In-8° de X-452 pp.) . . . marcs 16 00

P. Barbarin. La Géométrie non euclidienne. PGV, 1907 (In-12 cartonné de 91 pp. Collection *Scientia*) . . . . . fr. 2 00

F. G.-M. Exercices de Géométrie. Quatrième édition. Tours, Mame et Fils; Paris, Vve Poussielgue, 1907 (In-8°, cartonné de XXI-1238 pp avec 1519 fig. dans le texte) . . . . . fr. 12 00

M. Fr. Daniels. Essai de Géométrie sphérique en coordonnées projectives. Fribourg (Suisse), O. Gschwend, 1907 (Gr. in-8° de XII-280 pp. avec 41 fig.).

M. d'Ocagne. Calcul graphique et Nomographie. Paris, Doin (In-12 cartonné de XXVI 392 pp.) . . . . . fr. 5 00

G. Loria. Vorlesungen über darstellende Geometrie. Deutsche Ausgabe von **Fr Schütte.** I. Die Darstellungsmethoden. LT, 1907 (In-8° cartonné de XI-219 pp.) . . . . . marcs 6 80

Léon Lecornu. Dynamique appliquée. Paris, Doin (Cartonné de 534 pp. in-12) fr. 5.00

Deutches Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik in München. Führer durch die Sammlungen. BGT, 1907 (In 4 obl. de 160 pp.) mark 1 00

Avis aux auteurs de questions résolues.

Prière instante aux auteurs de questions résolues de les envoyer à la Rédaction de *Mathesis* sous une forme qui permette de les livrer à l'impression sans leur faire subir des retouches. Pour cela : 1° Ecrire sur une première ligne le mot *question* et le n° de la question précédés ou non de la croix, et soulignés par une ligne ondulée. 2° Ecrire sur une seconde ligne, avec la parenthèse habituelle, Mathesis, *sans accent*, ce mot étant souligné, avec l'indication de l'endroit où la question a été posée. 3° Transcrire l'énoncé de la question, souligné en entier. 4° Mettre au bout le nom de l'auteur de la question souligné *deux* fois, entre parenthèses. 5° Commencer les premières lignes de la solution, par les mots : *Solution par* soulignés une fois, suivi du nom de l'auteur souligné *deux* fois. 6° Continuer, sans aller à la ligne. 7° Dans le texte de la solution, aller à la ligne chaque fois que l'on doit écrire une égalité ou une équation qui n'est pas très courte. 8° Ecrire $\frac{1}{2}a$ plutôt que $\frac{a}{2}$; $(n-p)$ plutôt que $\overline{n-p}$: *angle* ABC plutôt que $\widehat{ABC}$, $\sqrt{a}$ plutôt que $\sqrt{a}$. 9° Observer les règles de la ponctuation *française*, et non celles de la ponctuation *belge*. 10° Laisser une marge.

Prière à nos correspondants de joindre leur adresse PRÉCISE à CHACUN de leurs envois, au bas de leur article.

Digitized by Google

SOMMAIRE.

	Pages
×Sur la droite d'Euler d'un triangle, par M. J. Neuberg	233
Sur le calcul de π (P. M)	236
×Note mathématique	243
Bibliographie	244
Solutions de questions proposées (1672, ×1673, 1676)	247
Question d'examen (×1408)	256
Questions proposées (1691 à 1695)	256

Les articles marqués d'une croix peuvent être compris. les questions marquées d'une croix peuvent être résolues, au moyen des mathématiques élémentaires.

Les articles destinés à *Mathesis* doivent être adressés *franco de port*, à M. P. MANSION, quai des Dominicains, 6, Gand, ou à M. J. NEUBERG, rue de Sclessin, 6, Liége.

Ils doivent être écrits lisiblement et sur un seul côté de la feuille. Une même feuille doit contenir un seul article ou une seule question résolue, **précédée de l'énoncé de la question** Les auteurs de notes *exigeant des figures* sont priés de *dessiner celle-ci, avec soin, dans le format du journal, sur des feuilles séparées.* Les auteurs de *Questions à résoudre* sont priés de donner, avec les énoncés, *un aperçu des solutions.*

La Rédaction ne renvoie pas les manuscrits non insérés.

Les auteurs d'articles insérés dans *Mathesis,* qui en avertissent la **Rédaction** à temps, *en donnant leur adresse,* peuvent obtenir des tirages à part moyennant 5 francs, par feuille ou fraction de feuille, pour 100 exemplaires. 3 francs pour 50 exemplaires, 2 francs pour 30 exemplaires, frais de remaniement non compris.

Les ouvrages de mathématiques dont on enverra un ou deux exemplaires à M. P. MANSION, seront annoncés ou analysés dans le journal. Prière d'en d'indiquer le prix.

Mathesis paraît, en général, vers le 15 de chaque mois, par livraisons de 24 pages, qui peuvent être accompagnées de suppléments. Prix de l'abonnement annuel (**payable par anticipation**) :

Pour la Belgique	fr. 7 50
Pour l'Etranger	» 9 00

On s'abonne chez M. AD. HOSTE, rue des Champs, 47, Gand (par un mandat postal, p. ex.) et chez M. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris.

Les réclamations, changements d'adresse, etc.. doivent être adressés, NON aux rédacteurs, mais à M. HOSTE.

Les nouveaux abonnés de *Mathesis* qui en feront la demande à M. MANSION, *en donnant leur adresse exacte,* recevront gratuitement les articles intitulés : 1° *Les premiers principes de la géométrie,* par M. DE TILLY ; 2° *Un autre mémoire* ; 3° *Sur la méthode analytique des anciens,* par M. P. MANSION; 4° *Questions d'admission à l'École militaire de Bruxelles* (1904) (ensemble 47 pages). ou d'autres Mémoires équivalents

Digitized by Google

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Professeur ordinaire à l'Université de Gand, | Professeur ordinaire à l'Université de Liége
Anciens élèves de l'École normale des sciences,
Membres de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis
PH. BERT

TROISIÈME SÉRIE.

TOME VIII — JUIN 1908.

(TOME XXVIII DE LA COLLECTION).

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
21-23, RUE DU CALVAIRE, 21-23

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1908

Digitized by Google

EN VENTE CHEZ M. GAUTHIER-VILLARS A PARIS ET M. HOSTE A GAND.

Mathesis. Tome I (280 pages), 1881. II (272 p.). 1882. III (292 p.), 1883. IV (324 p.), 1884. V (432 p.), 1885. VI (368 p.), 1886. (**Rares**), VII (408 p.), 1887. VIII (353 p.), 1888. IX (344 p.), 1889. X (312 p.), 1890. XI (347 p.), 1891. XII (366 p.), 1892. XIII (381 p.), 1893. XIV (295 p.). 1894. XV (364 p.), 1895. XVI (396 p.), 1899. XVII (336 p.), 1897. XVIII (348 p.), 1898. XIX (312 p.), 1899. XX (318 p.), 1900. XXI (343 p.), 1901. XXII (334 p.), 1902. XXIII (312 p.), 1903. XXIV (384 p.), 1904. XXV (336 p.), 1905. XXVI (384 p.), 1906. XXVII (344 p.) 1907. Gr. in-8°. Gand, fr. 7 50; à Paris, fr. 9 00.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par Liouville (1836), continué (1875) par H. Resal, publié, depuis 1885, en livraisons trimestrielles, par C. Jordan. Prix de l'abonnement, *pris à Paris*, 30 fr.; union postale 35 00

PGV = Paris, Gauthier-Villars LT = Leipzig, B. G. Teubner.

Hermite. Œuvres. Tome II. PGV, 1908 (In de VI-520 pp. avec portrait). fr. 18 00

J. J. Sylvester. The Collected Mathematical Papers. Volume II. Cambridge, at the University Press, 1908 (Cartonné in 4° de XVI-731 pp. avec 2 pl.) Sh. 18

Z. de Galdeano 1. Consideraciones sobre Filosofia y enseñanza de la Matemática, 1907 (In-8° de 115 pp.. 2. **Exposición** sumaria de las teorias matematicas, 1907 (In-8° de 208 pp.) . . . . Pesetas 2.00 + 4.00

M. Cantor. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Vierter Band. LT, 1908 (grand in 8 de VI-1114 pp.) . . . . . marcs 32 00

Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages **Leonard Eulers.** LT, 1907 (In-8 de IV-137 pp. in-8; deux portraits) . . . . . marcs 5 00

P. Stäckel und W. Ahreus. Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuss über die Herausgabe der Werke Leonard Eu'ers. LT, 1908 (In-8 de XII-184 pp.) . . . . . marcs 8 00

F. Rudio. Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. LT, 1907 (In 18, cartonné de X-184 pp.). marcs 4 80

H. Minkowski. Diophantische Approximationen, eine Einführung in die Zahlentheorie. LT, 1907 (Cartonné in-8 de VIII-236 pp.) . . marcs 8 00

F. Sommer Vorlesungen über Zahlentheorie. LT, 1907 (In-8, cartonné de VI-361 pp.) . . . . . marcs 11 00

de Laplanche. Etude sur les angles imaginaires. Paris, Hermann, 1908 (In-8 de 135 pp) . . . . . fr. 8 00

H. Burkhardt. Vorlesungen über die Elemente der Differentialrechnung. LT, 1907 (Cartonné in-8 de XI-252 pp.) . . . . . marcs 6 00

L. Schlesinger. Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. LT, 1908 (In-8 de X-334 pp.). . . . . marcs 10 00

O. Bolza. Vorlesungen über Variationsrechnung. Erste Lieferung. LT, 1908 (In-8 de IV-300-10 pp.) . . . . . marcs 8 00

Durège u. Maurer. Theorie der elliptischen Functionen. 5te Auflage. LT, 1908 (In-8, cartonné de VIII-436 pp) . . . . . marcs 11 00

W. Scheibner. Berträge zur Theorie der linearen Transformationen. LT, 1907 (In-8 de 250 pp.) . . . . . marcs 10 00

R. de Montessus. Leçons élémentaires sur le Calcul des Probabilités. PGV 1908 (In-8, de VI-191 pp.). . . . . fr. 7 00

A. Crefoeur. Cours d'analyse. Troisième partie. Calcul des probabilités. Anvers, De Vlijt, 1905 (116 pp. in-8°) . . . . . fr. 4 00

L. Krüger. Bedingungsgleichungen für Liniennetze und für Rückwärtseinschnitte. LT, 1908 (In-4 de IV-50 pp.) . . . . . marcs 4 00

Digitized by Google

QUESTIONS D'ANALYSE;

par M. J. Rose (Chimay).

I.

Intégrer l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = \cos 3t. \qquad (1)$$

(*Certificat d'études supérieures, Bordeaux*, 1903).

Intégrons d'abord l'équation sans second membre; les racines de l'équation caractéristique étant $3i$, $-3i$, l'intégrale est

$$x = A\cos 3t + B\sin 3t. \qquad (2)$$

Une intégrale particulière de l'équation avec second membre peut avoir la forme

$$x = t(C\cos 3t + D\sin 3t). \qquad (3)$$

En substituant cette valeur dans l'équation (1), on trouve $C = 0$, $D = \frac{1}{6}$; par suite l'intégrale cherchée, égale à la somme des intégrales (2) et (3), est

$$x = A\cos 3t + B\sin 3t + \frac{1}{6}t\sin 3t.$$

II.

Etant donné un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, *on considère les courbes* C *telles que l'ordonnée à l'origine de la tangente au point d'abcisse* x *soit égale à* kx^n; k *est une constante.* n *un entier positif.*

1° *Trouver l'équation générale des courbes* C.

2° *Le nombre* n *étant supposé* > 1, *on considère la courbe* γ *de la famille* C *tangente à* Ox *en* O; *trouver l'équation générale des courbes telles que la tangente en un point quelconque* P *à l'une de ces courbes, soit perpendiculaire sur la tangente à* γ, *au point d'intersection de cette dernière courbe et de la parallèle à* Oy *menée par* P; *montrer que pour une valeur particulière de* n, *ces courbes sont des hyperboles équilatères.*

(*Lille, novembre* 1903).

1. L'ordonnée à l'origine de la tangente au point (x, y) étant $y - xy'$, l'équation différentielle des courbes C est

$$y - xy' = kx^n, \quad \text{ou} \quad dy - \frac{y}{x}dx = -kx^{n-1}.$$

Digitized by Google

Comme elle est linéaire et du premier ordre, elle admet l'intégrale

$$y = e^{\int \frac{dx}{x}} \left[-\int k x^{n-1} e^{-\int \frac{dx}{x}} dx + C \right] = x\left(C - k \frac{x^{n-1}}{n-1} \right).$$

2. La courbe γ qui, parmi les courbes C, touche Ox en O correspond à $C = 0$; elle a donc pour équation $y = -k \frac{x^n}{n-1}$. Soient (x, y) les coordonnées du point P; la parallèle à Oy menée par P coupe γ au point $\left(x, -k \frac{x^n}{n-1} \right)$. Donc, en ce point, $y' = -\frac{nkx^{n-1}}{n-1}$; pour que la tangente en ce point soit perpendiculaire à la tangente en P à la courbe inconnue Γ, il faut que

$$\frac{nkx^{n-1}}{n-1} y' = 1 \quad \text{ou} \quad dy = \frac{n-1}{nk} \frac{dx}{x^{n-1}}.$$

Les courbes Γ ont donc pour équation

$$y = C' - \frac{n-1}{n(n-2)kx^{n-2}};$$

ce sont des hyperboles équilatères lorsque $n = 3$.

III.

On considère l'équation aux dérivées partielles :

$$2y \frac{dz}{dx} + 3x^2 \frac{dz}{dy} + 6x^2 y = 0.$$

1° *Trouver son intégrale générale;*

2° *Déterminer la surface* S *qui, rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *vérifie cette équation aux dérivées partielles et passe par la parabole définie par les équations* $x = 0$, $y^2 = 2z$.

3° *Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface.*

(*Certificat, Toulouse* 1903).

Le système différentiel correspondant est

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{3x^2} = \frac{dz}{-6x^2 y};$$

comme il admet les intégrales

$$x^3 - y^2 = \alpha, \quad z + y^2 = \beta, \tag{1}$$

Digitized by Google

l'intégrale demandée est, φ désignant une fonction arbitraire,

$$z + y^2 = \varphi(x^3 - y^2) \qquad (2)$$

Pour que la surface (2) passe par la parabole $x = 0$, $y^2 = 2z$, il faut que $3z + 2z = 0$; par suite l'équation de S est

$$3(x^3 - y^2) + 2(z + y^2) = 0, \quad \text{ou} \quad 2z = y^2 - 3x^3. \qquad (3)$$

Les asymptotiques de la surface (3) vérifient l'équation différentielle $rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2 = 0$, qui devient ici

$$-9xdx^2 + dy^2 = 0,$$

et admet l'intégrale $y = \pm 2x\sqrt{x} + C$.

Les deux systèmes de lignes asymptotiques ont donc pour équations

$$\begin{cases} 2z = y^2 - 3x^3, \\ y = 2x\sqrt{x} + C; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2z = y^2 - 3x^3 \\ y = -2x\sqrt{x} + C. \end{cases}$$

IV.

Déterminer une surface telle que chaque point M *soit le centre de gravité du triangle ayant pour sommets les points de rencontre* A, B, C *des axes avec le plan tangent en* M. (*Poitiers, juillet* 1903).

L'équation du plan tangent au point M (x, y, z) étant

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

on trouve aisément

$$OA = \frac{px + qy - z}{p}, \quad OB = \frac{px + qy - z}{q}, \quad OC = z - px - qy.$$

Le centre de gravité du triangle ABC a pour coordonnées $\frac{1}{3}OA, \frac{1}{3}OB, \frac{1}{3}OC$; par conséquent

$$-2px + qy = z, \quad px - 2qy = z, \quad px + qy = -2z.$$

Ces trois équations se réduisent à deux. Des deux premières on déduit $p = -\frac{z}{x}$, $q = -\frac{z}{y}$; la condition d'intégrabilité d'une expression différentielle de deux variables étant remplie, l'égalité $dz = pdx + qdy$ devient

$$\frac{dz}{z} + \frac{dx}{y} + \frac{dy}{x} = 0, \quad \text{d'où} \quad xyz = C.$$

Digitized by Google

V.

Dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires Ox *et* Oy, *on considère une courbe* K *telle que la projection* C′ *sur l'axe* Ox *du centre de courbure* C, *relatif à un point* M, *et le point* T *de rencontre de la tangente en* M *avec* Ox, *soient constamment symétriques par rapport à la projection* P *de* M *sur* Ox. *Former et intégrer l'équation différentielle qui définit la courbe* K ; *vérifier que la distance du point* P *à la normale en* M *est constante.* (*Toulouse, juillet* 1903).

L'équation différentielle de la courbe K cherchée est :

$$2x = \left(x - \frac{y}{y'}\right) + \left(x - \frac{1+y'^2}{y''}y'\right),$$

ou

$$yy'' + (1+y'^2)\,y'^2 = 0.$$

En posant $y' = p$, cette dernière équation devient :

$$y\frac{pdp}{dy} + (1+p^2)\,p^2 = 0,$$

$$\frac{dp}{p(1+p^2)} + \frac{dy}{y} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{p} + \frac{dy}{y} - \frac{pdp}{1+p^2} = 0.$$

Intégrée, elle donne : $\dfrac{py}{\sqrt{1+p^2}} = \alpha$. On en déduit :

$$p = \frac{\alpha}{\sqrt{y^2-\alpha^2}}, \quad dy\sqrt{y^2-\alpha^2} - \alpha dx = 0.$$

Finalement l'intégrale générale est :

$$\frac{y}{2}\sqrt{y^2-\alpha^2} - \frac{\alpha^2}{2}l\left|y + \sqrt{y^2-\alpha^2}\right| - \alpha x = \beta.$$

D'autre part, la distance du point P à la normale étant $-\dfrac{py}{\sqrt{1+p^2}}$, on voit d'après les calculs précédents que cette distance a la valeur constante a.

NOTES MATHÉMATIQUES.

19. *Applications de la théorie des figures inverses.* Considérons trois circonférences O_1, O_2, O_3 qui passent par un même point A ; une sécante quelconque m menée par A les rencontre en B_1, B_2, B_3. Soit à

Digitized by Google

trouver le lieu du point X de la sécante m tel que le rapport anharmonique $(B_1B_2B_3X)$ ait une valeur donnée K.

Le cas particulier de $K = -1$ nous a été adressé sous forme de question proposée par M. Titus Patriciu, qui en indique la solution au moyen de l'inversion, ce qui fait dépendre la question d'un cas particulier de la *transformation quadrique* de Hirst (*Mathesis*, 1885, pp. 115-116).

Nous traitons ici la question plus générale. Si l'on prend le point A pour pôle d'inversion les cercles O_1, O_2, O_3 se transforment en trois droites c_1, c_2, c_3; soient C_1, C_2, C_3, Y les inverses des points B_1, B_2, B_3, X. Il y a lieu de distinguer deux cas.

1° Si les trois circonférences ont un second point commun A′, les droites c_1, c_2 c_3 passent par l'inverse D de A′, et comme le rapport $(C_1C_2C_3Y) = K$, le lieu de Y est la droite c_4 menée par D et telle que $(c_1c_2c_3c_4) = K$. Le lieu de X est donc une circonférence menée par A et A′.

2° Si A est le seul point commun aux trois circonférences O_1, O_2, O_3, les droites c_1, c_2, c_3 forment un triangle $E_1E_2E_3$; appelons c'_3, y les droites variables E_3C_3. E_3Y. Le rapport $(c_1c_2c'_3y)$ ayant la valeur constante K, les droites c'_3 et y se correspondant dans deux faisceaux projectifs dont c_1 et c_2 sont les rayons doubles. Mais c'_3 et m se correspondent également dans deux faisceaux projectifs; il en résulte que les droites y et m sont des éléments homologues de deux faisceaux projectifs et que leur intersection Y engendre une conique passant par A, E_3, E_1, E_2. On conclut de là que le lieu de X est l'inverse d'une conique par rapport à l'un de ses points, ou une cubique ayant un point double en A et passant pas les seconds points communs aux cercles O_1, O_2, O_3 pris deux à deux.

On arrive aussi à ce dernier résultat par la géométrie analytique en partant des équations des cercles donnés en coordonnées polaires

$$r = a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta, \quad r = a_2 \cos\theta + b_2 \sin\theta, \quad \text{etc.} \qquad \text{(J. N.)}$$

20. *Sur une identité algébrique:* Soient a, b, c, x, x' des quantités quelconques réelles ou imaginaires. Il est facile de vérifier l'identité

$$\frac{(a-x)(a-x')}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b-x)(b-x')}{(b-a)(b-c)} + \frac{(c-x)(c-x')}{(c-a)(c-b)} = 1, \qquad (1)$$

qui est susceptible de nombreuses interprétations géométriques.

Digitized by Google

1° Si a, b, c, x, x' sont les abscisses de cinq points A, B, C, X, X' en ligne droite, on a

$$XA.X'A\ BC + XB.X'B\ CA + XC.X'C.AB = AB.BC.CA, \qquad (2)$$

égalité où il faut appliquer la règle des signes. Faisons coïncider X' avec X ; alors

$$\overline{XA}^2.BC + \overline{XB}^2\ CA + \overline{XC}^2.AB = AB.BC.CA. \qquad (3)$$

2° On a identiquement

$$m^2.BC + m^2.CA + m^2.AB = 0. \qquad (4)$$

En ajoutant membre à membre les égalités (3) et (4), on voit que l'égalité (3) a encore lieu pour un point X extérieur à la droite AB ; car si l'on élève en X une perpendiculaire $XX' = m$, on aura $\overline{X'A}^2 = \overline{XA}^2 + m^2$, ··· On retrouve ainsi le théorème de Stewart.

3° Si l'on retranche l'égalité (3) de l'égalité (4), on peut considérer $\overline{XA}^2 - m^2$, $\overline{XB}^2 - m^2$, $\overline{XC}^2 - m^2$ comme les puissances P_a, P_b, P_c des points A, B, C par rapport à un cercle de centre X (situé ou non sur la droite AB) et de rayon m ; donc

$$P_a.BC + P_b.CA + P_c.AB = AB.BC.CA.$$

Ce théorème connu résulte aussi de l'égalité (2) si l'on considère un cercle coupant la droite AB aux points X, X'.

4° L'égalité (1) subsiste encore si l'on prend pour a, b, c, x, x' les nombres complexes qui représentent les points A, B, C, X, X' situés d'une manière quelconque dans un même plan. Écrivons-la ainsi :

$$\frac{XA.X'A}{AB.AC} + \frac{XB.X'B}{BA.BC} + \frac{XC.X'C}{CA.CB} = 1, \qquad (5)$$

et prenons pour X, X' deux points inverses par rapport au triangle ABC ; les trois rapports qui entrent dans l'équation (5) ont des valeurs réelles, car les angles (XA, AB) et (X'A, A'B), ··· sont égaux et de signes contraires. Il en résulte que l'égalité (2) a encore lieu Cet intéressant théorème avec sa démonstration, est dû à M Vande Griend (*Wiskundige Opgaven*, Deel X, 1907, p. 39) ; il peut être démontré directement, sans l'intervention des équipollences.

21. *Démonstration fonctionnelle du théorème de Pythagore* Soient $AB = x$, $AC = y$, $BC = z$ les côtés d'un triangle rectangle en A. La connaissance de x et y entraine celle de z et l'on peut poser

$$z = \varphi(x, y).$$

Digitized by Google

La fonction $\varphi(x, y)$ est évidemment symétrique par rapport à x et y. Essayons d'abord une fonction du premier degré, c'est-à-dire essayons la relation

$$z = m(x + y),$$

si on l'applique au triangle *aplati* dans lequel $y = 0$, $z = x$, on trouve $m = 1$. Mais on ne peut avoir dans un triangle proprement dit $z = x + y$.

L'hypothèse suivante à essayer est

$$z = \sqrt{m(x^2 + y^2) + pxy}.$$

En considérant encore le triangle aplati dans lequel $y = 0$, $z = x$, on trouve $m = 1$, de sorte que dans un triangle rectangle quelconque, il se peut que

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 + pxy}.$$

Appliquons cette formule à un triangle rectangle isoscèle ; elle donne

$$z = x\sqrt{2 + p}. \qquad (1)$$

Ce triangle se décompose en deux triangles rectangles isoscèles si l'on mène la hauteur ; la formule (1) doit s'appliquer à ces triangles ayant pour hypoténuse x et pour côtés de l'angle droit $\frac{z}{2}$. On a donc

$$x = \frac{z}{2}\sqrt{2 + p} = \frac{x}{2}(2 + p), \qquad (2)$$

d'où l'on déduit $p = 0$. Donc il se peut que

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nous donnons ceci, non comme une démonstration, mais comme une simple curiosité mathématique ; elle est empruntée aux *Unterrichts blätter für math. und naturw. Unterricht.* (*)

(*) Rappelons, à propos de la présente note mathématique, que Legendre a donné, dans la note II de ses *Eléments de Géométrie*, une démonstration incomplète mais très remarquable (surtout avec les additions qu'il a insérées dans la traduction anglaise faite par Carlyle et éditée par Brewster en 1824) du théorème relatif à la somme des trois angles d'un triangle. C'est une démonstration fonctionnelle qu'il suffit de compléter pour être conduit naturellement à l'une des idées fondamentales de la géométrie non euclidienne (P. M.).

Digitized by Google

BIBLIOGRAPHIE.

Hermann Grassmans gesammelte mathematische und physikalische Werke. Zweites Bandes erster Theil. Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis. Herausgegeben von E. STUDY, G. SCHEFFERS und FR. ENGEL. Leipzig, Teubner, 1904 (Gr. in-8° de X-452 pp. avec 45 figures dans le texte) Prix : 16 marcs.

La publication des œuvres complètes de H. Grassmann se fait sous les auspices de la Classe physico-mathématique de la Société Royale des Sciences de Saxe C'est un juste hommage rendu à la mémoire de l'un des mathématiciens des plus distingués de l'Allemagne, créateur de l'Algèbre extensive (Ausdehnungslehre).

Le volume actuel contient les vingt quatre articles suivants (les parenthèses indiquent les recueils où ils ont été publiés) :

I. Théorie des centrales (*Crelle*, XXIV, 1842 et 1844)

II. Fondements d'une théorie purement géométrique des courbes, en appliquant une analyse purement géométrique (*Crelle*, XXXI, 1846).

III. Sur la génération des cubiques par des droites et sur des définitions géométriques de ces courbes (*Crelle*, XXXVI, 1848).

IV. Le théorème général sur la génération des courbes algébriques par le mouvement de lignes droites (*Crelle*, XLI, 1851).

V. La projectivité et la perspectivité supérieures dans le plan, exposées par l'analyse géométrique (*Crelle*, XLII, 1851).

VI. La perspectivité supérieure dans le plan, réalisée par des relations de fonctions (*Crelle*, XLII, 1851).

VII. Génération des quartiques par le mouvement de droites (*Crelle*, XLIV, 1752).

VIII. Théorème général sur la génération linéaire de toutes les surfaces algébriques (*Crelle* IL, 1855).

IX. Principes fondamentaux de la multiplication stéréométrique (*Crelle*, IL, 1855).

X. Sur les différentes générations linéaires des surfaces algébriques (*Crelle*, IL, 1855).

XI. L'équation stéréométrique du second ordre et les surfaces qu'elle représente (*Crelle* IL, 1855).

XII. L'équation stéréométrique du troisième ordre et les surfaces qu'elle représente (*Crelle*, IL, 1855).

XIII. Sur les différents genres de multiplication (*Crelle*, LI, 1855).

XIV. La génération linéaire des cubiques (*Crelle* LII, 1856).

XV. Remarques mathématiques diverses (*Grunert*, IL, 1856). Formation de triangles rationnels. Construction approchée de π

XVI. Résolution en nombres entiers de l'équation $x^5 + y^5 + z^5 + u^5 = 0$. (*Grunert*, IL 1868).

XVII. Résolution élémentaire de l'équation générale du quatrième degré (*Grunert*, LI, 1870).

XVIII. Sur la théorie des cubiques (*Göttinger Nachrichten*, 1872).

Digitized by Google

XIX. Sur les pôles conjugués et leur représentation par des produits (*Ibid.*).

XX. L'algèbre moderne et l'algèbre extensive (*Mathem. Ann.* VII, 1874).

XXI. La place des quaternions de Hamilton dans l'Algèbre extensive (*Math. Ann.* XII, 1877).

XXII. Emploi de l'Algèbre extensive pour la théorie générale des polaires et pour les rapports entre différentes formes algébriques (*Crelle*, LXXXIV, 1877).

XXIII. Fragment du manuel d'Arithmétique (Berlin, 1861).

XXIV. Fragments du manuel de Trigonométrie.

Les éditeurs ont eu soin d'indiquer à côté du texte original des corrections ou améliorations. Ils ont aussi mis à la fin du volume des notes explicatives ou bibliographiques et des commentaires sur les vingt premiers articles (p.p 337-438); enfin un index terminologique et une table des noms facilitent les recherches. Toutes ces additions sont très précieuses.

Un grand nombre des résultats obtenus par Grassmann et concernant les courbes et les surfaces du troisième ordre sont devenus classiques. On peut aussi dire que le géomètre de Stettin a souvent devancé d'autres mathématiciens, mais que la forme sous laquelle il présentait ses recherches manquait souvent de clarté et n'en faisait pas ressortir la portée Par exemple, la théorie des quaternions de Hamilton, la théorie des clefs de Cauchy, l'invariantologie, la génération des courbes algébriques par la méthode de Chasles et de Jonquières se retrouvent au moins en germe dans les écrits de Grassmann.

Handbuch der Elementarmathematik für Lehrer von Prof. Dr. K. Schwering, Direktor des Gymnasiums an der Apostelkirche in Cöln a. Rh. Leipzig und Berlin, Teubner 1907. (Gr. in-8° de VIII-406 pp., avec 193 fig. dans le texte). Prix 8 marcs.

Table des matières. I. *Arithmétique* (pp. 1-169). Le nombre entier. Addition, multiplication, puissances. Le zéro. Soustraction, nombres négatifs. Division, nombres fractionnaires, nombres décimaux. Extraction des racines, nombres irrationnels, méthodes pratiques pour trouver une racine n^e. Nombres imaginaires. Logarithmes Équations des deux premiers degrés Progressions Combinaisons et permutations Binome de Newton Série exponentielle et conséquences. Équations cubiques et biquadratiques. Résolution approchée des équations. Probabilités. Fractions continues. Équations indéterminées.

II. *Planimétrie* (pp. 170 268). Point, droite, circonférence. Égalité des triangles. Problèmes fondamentaux. Parallélisme. Aires. Similitude; applications au triangle et au cercle. Rapport anharmonique, division et faisceau harmoniques, théorèmes sur les transversales. Transformations des figures (homothétie et inversion). Pôles et polaires. Points remarquables du triangle. Quelques applications.

III. *Trigonométrie* (pp. 269-321) A. Trigonométrie plane (p. 269-290) Définitions. Formules relatives à l'addition des arcs Formule de Monge. Multiplication des arcs. Formules de $\sin p \pm \sin q$, $\cos p \pm \cos q$. Calcul de π. B. Résolution des triangles (p 291-320). Formules. Cercles circonscrit et inscrits. Problèmes sur le quadrilatère. Méthode élémentaire pour déterminer π par les aires des

Digitized by Google

polygones réguliers inscrits et circonscrits semblables dont le nombre des côtés va toujours en doublant.

IV. *Stéréométrie* (322-406). Point et plan. Parallélisme. Trièdre, trièdres supplémentaires. Projection orthogonale. Détermination des volumes et des surfaces. Polyèdres réguliers. Puissance par rapport à une sphère Inversion dans l'espace. Sections planes des corps ronds. Centre de gravité. — Trigonométrie sphérique.

Nous venons de transcrire (en abrégé) la table des matières pour montrer que l'auteur, s'adressant aux professeurs des établissements secondaires a passé en revue presque tout le programme d'après les derniers progrès au point de vue d'une exposition rigoureuse des principes fondamentaux Ce n'est donc pas un manuel qu'il a voulu faire, mais un livre au moyen duquel le maître peut se mettre au courant des tendances modernes pour en faire profiter son enseignement dans la mesure du possible. L'Arithmétique, par exemple, a reçu des développements successifs dans le sens de la loi de permanence. En Géométrie, on expose avec assez de netteté la question des définitions, des axiômes et postulats.

L'auteur a-t-il partout réussi dans sa tâche? Sans nous prononcer sur ce point, sans vouloir faire la comparaison de son ouvrage avec des livres similaires (Nombres positifs, par Stuyvaert; l'Encyclopédie de Weber et Wellstein; etc.), nous n'hésitons pas à recommander la lecture de cet essai aux professeurs et aux élèves des classes supérieures de l'enseignement moyen.

Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung von E. Czuber, Professor an der technischen Hochschule zu Wien. Zweite Ausgabe. Leipzig, Teubner, 1906, I. Differential-Rechnung. II. Integral-Rechnung (Deux vol. in-8°, de xiv-560 et viii-532 pp: Prix : 12 marcs + 12 marcs

La première édition, parue en 1898, a été accueillie avec très grande faveur. La seconde édition, soigneusement revue, a reçu quelques accroissements importants parmi lesquels il convient surtout de citer les chapitres relatifs aux fonctions hyperboliques, la notion de la fonction d'une variable complexe, les intégrales eulériennes, les séries de Fourier, le calcul des moments d'inertie, la détermination des centres de gravité, les théorèmes de Green; des notices historiques et bibliographiques ont été ajoutées par ici et par là, enfin des exercices assez nombreux ont été proposés à la suite des principales théories.

M. Czuber a eu surtout en vue les besoins des élèves ingénieurs; néanmoins ceux qui font une étude spéciale de l'Analyse trouveront dans son livre un excellent guide pour une première initiation. On retrouve ici les qualités [illegible] qui ont valu un si grand succès aux Traités d'Analyse et de [illegible] en Allemagne; rédaction très claire, bon choix et [illegible] à la théorie. [illegible] que cela peut [illegible] des progrès [illegible] dans l'exposé des principes fondamen-

taux de l'Analyse. C'est ainsi que le tome I débute par un exposé lumineux, pas trop étendu, des généralisations successives de la notion du nombre ; le tome II, par l'explication de l'intégrale définie comme limite de sommed'infiniment petits, précédant la notion de l'intégrale indéfinie Il est vrai qu'on peut discuter sur l'introduction de quelques notions de calcul intégral avant les notions des aires planes et de la longueur d'un arc de courbe ; mais pour une explication complète du *ds* l'auteur a renvoyé au tome II. Parmi d'autres parties remarquables, mentionnons la notion de la dérivée avec ses particularités, la continuité et la discontinuité des fonctions, la convergence des séries à termes variables, la théorie des équations différentielles suffisamment complète pour les techniciens, l'interprétation géométrique des formules ou propositions, les singularités des courbes, etc.

Pour achever de donner au lecteur une idée de cet excellent traité, nous résumons la table des matières.

Calcul différentiel I. Variables et fonctions (p. 1-41). II. Différentiation des fonctions d'une seule variable (dérivées et différentielles successives ; changement de variables) (p. 42-99). III Différentiation des fonctions de plusieurs variables (p 100-158). IV. Séries (séries à termes constants ; séries à termes variables ; formules de Taylor et de Maclaurin ; fonctions élémentaires d'une variable imaginaire ; symboles d'indétermination) (p. 159-279). V. Maxima et minima des fonctions (p. 280-329). VI. Applications géométriques. A. Courbes planes (330-445). Tangente et normale ; asymptotes ; étude d'une courbe dans le voisinage d'un point ; relation entre deux courbes dans le voisinage d'un point commun ; différentielle d'un arc ; courbure ; points singuliers ; courbes enveloppes. B. Courbes gauches et surfaces courbes (p 446-560) Tangente et normale d'une courbe gauche ; première courbure ; plan osculateur, seconde courbure ; tangente, plan tangent, plan normal d'une surface courbe ; surfaces enveloppes, surface polaire d'une ligne courbe ; courbure des lignes tracées sur une surface ; courbes particulières tracées sur une surface

Calcul intégral I. Principes fondamentaux (p. 1-38). II. Intégrales indéfinies (p. 39-105). III. Intégrales définies simples ou multiples (p. 106-223). Valeur exacte ou approchée d'une intégrale définie ; extension de la notion d'intégrale définie ; intégration des séries ; différentiation et intégration sous le signe, intégrale double ; intégrales multiples ; applications analytiques. IV. Applications géométriques et mécaniques (p. 224 337). Quadrature des courbes planes, rectification des courbes ; cubature et aire des surfaces courbes ; déterminations de moments de masses ou d'inertie centres de gravité ; théorèmes de Green ; le potentiel. V. Equations différentielles. A. Équations différentielles ordinaires (p. 338-467). Equations du premier ordre, solutions singulières, applications géométriques ; systèmes différentiels ; équations différentielles d'un ordre supérieur ; équations différentielles linéaires ; intégration par les séries ; calcul des variations. B. Équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres (p. 468-532).

Digitized by Google

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1107.

(Voir *Mathesis*, (2), VII, p. 51.)

Soit MN *la corde normale en un point* M *d'une ellipse donnée. Le cercle de diamètre* MN *rencontre l'ellipse en un point* P. *Trouver le degré et l'ordre des courbes suivantes*: 1° *l'enveloppe de* NP; 2° *le lieu de la projection du centre de l'ellipse sur* NP; 3° *le lieu du milieu de* NP; 4° *le lieu du pôle de* NP *par rapport à l'ellipse.* (E. N. Barisien)

Solution par M. Barisien (*). La normale au point M $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ a pour équation

$$ax\sin\varphi - by\cos\varphi = c^2\sin\varphi\cos\varphi. \tag{1}$$

Les directions de la tangente en M et de la droite NP étant symétriques par rapport à l'axe Ox, l'équation de NP est de la forme

$$bx\cos\varphi - ay\sin\varphi = \mu, \tag{2}$$

et le cercle de diamètre MN peut être représenté par

$$(bx\cos\varphi + ay\sin\varphi - ab)(bx\cos\varphi - ay\sin\varphi + \mu) + \lambda(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) = 0.$$

En égalant les coefficients de x^2 et y^2 on trouve

$$\lambda = \frac{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}{c^2};$$

substituant cette valeur et ordonnant ensuite l'équation, on détermine aisément les coordonnées du centre qui sont

$$\frac{c^2(\mu + ab)\cos\varphi}{2a^2b}, -\frac{c^2(\mu - ab)\sin\varphi}{2ab^2}. \tag{3}$$

Ce centre est sur le diamètre conjugué de la normale (1); portons donc les valeurs (3) dans l'équation de ce diamètre qui est

$$b^2x\cos\varphi + a^2y\sin\varphi = 0;$$

l'égalité ainsi obtenue déterminera μ, et l'on aura l'équation définitive de la droite NP

$$bx\cos\varphi - ay\sin\varphi = ab\frac{a^4\sin^2\varphi - b^4\cos^2\varphi}{a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi}. \tag{4}$$

(*) Aucune solution de la question 1107 ne nous étant parvenue, nous publions celle de l'auteur, mais en ne donnant que les résultats définitifs des intégrations. (*Rédaction*). — Nous avons reçu trop tardivement pour les signaler des solutions des questions 1653, 1654 par M. Prange, 1663 par MM. Boland et Barisien.

Digitized by Google

1° *Enveloppe de* NP. L'équation dérivée de (4) par rapport à φ est

$$bx \sin\varphi + ay\cos\varphi = -4a^5b^5 \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)^2}. \qquad (5)$$

En résolvant (4) et (5) par rapport à x et y, on a, pour les équations paramétriques de l'enveloppe,

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a\cos\varphi(a^4\sin^2\varphi - b^4\cos^2\varphi)}{a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi} - 4\frac{a^5b^5\sin^2\varphi\cos\varphi}{(a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)^2}, \\ y &= -\frac{b\sin\varphi(a^4\sin^2\varphi - b^4\cos^2\varphi)}{a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi} - 4\frac{a^5b^5\sin\varphi\cos^2\varphi}{(a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Si l'on pose $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = t$, on voit que la courbe est une unicursale du 8e degré.

L'aire est donnée par la formule

$$2dU = xdy - ydx.$$

En effectuant un calcul qui, sans être difficile, est un peu long, on trouve

$$U = \pi\frac{(a^4 + b^4)(a^4 + a^2b^2 + b^4)}{ab(a^2 + b^2)^2}.$$

2° *Lieu de la projection du centre de l'ellipse sur* MP. La perpendiculaire abaissée de O sur NP a pour équation

$$ax\sin\varphi + by\cos\varphi = 0. \qquad (7)$$

L'élimination de φ entre (4) et (7) donne

$$(x^2 + y^2)^2(b^2x^2 + a^2y^2) = (a^2x^2 + b^2y^2)(b^2x^2 - a^2y^2)^2. \qquad (8)$$

Ce lieu est encore une unicursale du 8e degré dont l'équation en coordonnées polaires est

$$r^2 = \frac{(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta)(b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta)^2}{(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)^2}.$$

La formule $dU = \frac{1}{2}r^2 d\theta$ donne

$$U = \frac{\pi}{2(a+b)^2}[(a^2 + b^2)(a - b)^2 + 4a^2b^2].$$

3° *Lieu du milieu de* NP. Le diamètre conjugué à NP a pour équation

$$ay\cos\varphi + bx\sin\varphi = 0. \qquad (9)$$

L'élimination de φ entre (4) et (9) donne

$$(b^2x^2 + a^2y^2)(b^6x^2 + a^6y^2)^2 = a^2b^2(a^6y^2 - b^6x^2)^2.$$

Digitized by Google

Donc le lieu cherché est une sextique unicursale, dont l'aire est

$$U = \frac{\pi ab(a^4 + b^4)}{(a^2 + b^2)^2}.$$

4° *Lieu du pôle de* NP *par rapport à l'ellipse.* Ce pôle a pour coordonnées

$$X = \frac{a\cos\varphi(a^4\sin^2\varphi + b^4\sin^2\varphi)}{a^4\sin^2\varphi - b^4\cos^2\varphi}, \quad Y = -\frac{b\sin\varphi(a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi)}{a^4\sin^2\varphi - b^4\cos^2\varphi}$$

d'où l'on déduit l'équation cartésienne du lieu :

$$(b^2X^2 + a^2Y^2)(b^6X^2 - a^6Y^2)^2 = a^2b^2(b^6X^2 + a^6Y^2)^2.$$

le lieu est une sextique unicursale.

Remarques I. Soit M′ le symétrique de M par rapport à O; le lieu du point de rencontre de NP avec la tangente en M′ est la quartique

$$(a^2x^2 + b^2y^2)^2 = a^6x^2 + b^6y^2,$$

ayant pour aire

$$U = \pi\frac{a^4 + b^4}{2ab}.$$

II. La droite MP qui a pour équation

$$ax\sin\varphi + by\cos\varphi = (a^2 + b^2)\sin\varphi\cos\varphi,$$

est normale à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{c^4}.$$

III. La projection de O sur MP décrit la sextique

$$(x^2 + y^2)^2(b^2x^2 + a^2y^2) = (a^2 + b^2)^2x^2y^2,$$

dont l'aire est

$$U = \pi\frac{(a^2 + b^2)^2}{2(a + b)^2}.$$

IV. Le milieu de la corde MP décrit la sextique

$$(b^2x^2 + a^2y^2)^2(b^6x^2 + a^6y^2) = a^4b^4(a^2 + b^2)^2x^2y^2,$$

qui a pour aire $\frac{1}{2}\pi ab$.

V. Le lieu du pôle de MP est la Kreuzcurve

$$(a^2 + b^2)^2x^2y^2 = b^6x^2 + a^6y^2.$$

Digitized by Google

×Question 1498.

(Voir *Mathesis*, (3), IV, p. 280).

Trouver les racines de l'équation

$$R^2(x+b+c-a)(x+a+c-b)(x+a+b-c)(x-a-b-c) + (ax+bc)(bx+ac)(cx+ab)=0.$$

(E. N. Barisien)

Cette équation est la traduction du problème suivant : *Connaissant trois côtés a, b, c d'un quadrilatère inscrit à un cercle de rayon* R, *trouver le quatrième côté.*

Aucune solution ne nous étant parvenue, nous croyons utile de reprendre ici quelques développements sur le quadrilatère inscrit.

1° Pour plus de facilité, désignons par a, b, c, d, p, q les côtés AB, BC, CD, DA et les diagonales AC, BD d'un quadrilatère *convexe* ABCD, inscrit à un cercle de rayon R. En menant la corde DD′ parallèle à AC et la corde CC′ parallèle à BD on obtient deux autres quadrilatères inscrits ABCD′ et ABC′D, avec les mêmes côtés se succédant respectivement dans les ordres *abdc*, *acbd*; il est facile de voir qu'il n'y a pas d'autre quadrilatère inscrit avec les côtés a, b, c, d. Ces nouveaux quadrilatères ont même surface Q que ABCD et leurs diagonales BD′, AC′ sont égales; nous posons $BD' = AC' = m$.

Le théorème de Ptolémée donne

$$pq = ac+bd, \quad pm = ad+bc, \quad qm = ab+cd; \tag{1}$$

de ces relations, on déduit

$$\frac{p}{q} = \frac{ad+bc}{ab+cd}, \tag{2}$$

$$p^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}, \ldots \tag{3}$$

En appliquant la formule $abc = 4RS$ au triangle ABC de notre figure, on trouve

$$a^2b^2p^2 = 16R^2.\overline{ABC}^2 = R^2[4a^2b^2-(a^2+b^2-p^2)^2],$$

la substitution de la valeur (3) de p^2 montre que

$$a^2+b^2-p^2 = \frac{ab(a^2+b^2-c^2-d^2)}{ab+cd},$$

Digitized by Google

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned}(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc) &= R^2[4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2]\\ &= R^2(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d);\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ce qui est l'équation de M. Barisien si l'on change d en x.

Le premier membre est égal à $m^2p^2q^2$, le second à $16R^2Q^2$.

2° Soit maintenant ABCD un quadrilatère inscrit *étoilé* dont les côtés BC, DA se coupent en un point E intérieur au cercle. En menant encore la corde DD′ parallèle à la *diagonale* AC et la corde CC′ parallèle à BD, on obtient deux autres quadrilatères étoilés ABCD′, ABC′D dont les côtés consécutifs sont *abdc*, *acbd* et qui ont une même diagonale $BD' = AC' = m$.

On conclut du théorème de Ptolémée :

$$pq = bd - ac, \quad pm = ad - bc, \quad qm = ab - cd;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{p}{q} = \frac{ad-bc}{ab-cd}, \quad p^2 = \frac{(bd-ac)(ad-bc)}{ab-cd}.$$

Enfin, en appliquant encore la formule $abc = 4RS$ au triangle ABC on trouve

$$\begin{aligned}(bd-ac)(ad-bc)(ab-cd) &= R^2[4(ab-cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2]\\ &= R^2(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(-a+b+c-d).\end{aligned}$$

Le premier membre de ce résultat représente encore $m^2p^2q^2$; le dernier est égal à $16R^2Q^2$, Q désignant la différence des aires des triangles EAB, ECD.

On peut passer du quadrilatère convexe au quadrilatère étoilé en changeant le signe de l'une des lettres a, b, c, d.

3° Si aucun des nombres a, b, c n'est supérieur à R, désignons par 2α, 2β, 2γ les angles au centre qui correspondent à des cordes égales à a, b, c dans un cercle de rayon R ; nous aurons

$$a = 2R\sin\alpha, \quad b = 2R\sin\beta, \quad c = 2R\sin\gamma.$$

Supposons d'abord $\alpha+\beta+\gamma < 180°$; on peut alors inscrire au cercle un quadrilatère convexe dont trois côtés consécutifs sont a, b, c; le quatrième côté représenté par x sera donné par l'équation proposée et a aussi pour expression

$$x = 2R\sin(\alpha+\beta+\gamma) = 2R(\Sigma\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) \quad (5)$$

Digitized by Google

ou encore

$$x = \Sigma a \sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{4R^2}\right)\left(\frac{c^2}{4R^2}\right)} - \frac{abc}{4R^2}. \qquad (6)$$

Si $\alpha + \beta + \gamma > 180°$, en portant consécutivement (dans le même sens) les cordes AB, BC, CD égales à a, b, c, on obtient les sommets d'un quadrilatère étoilé ABCD, dont le dernier côté correspond à une racine négative de l'équation proposée et est encore donné par la formule précédente.

On peut imaginer des quadrilatères obtenus en portant consécutivement deux des cordes a, b, c dans un même sens et la troisième en sens contraire ; le quatrième côté correspond alors à l'une des expressions

$$2R \sin(-\alpha + \beta + \gamma), \quad 2R \sin(\alpha - \beta + \gamma), \quad 2R \sin \alpha + \beta - \gamma)$$

ou au changement de signe de $\sin \alpha$, $\sin \beta$ ou $\sin \gamma$ dans la formule (5). Dans la formule (6), l'un des trois premiers termes changera de signe ainsi que le quatrième.

L'équation admet la racine $x = 0$ si l'on a

$$R^2(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)(a + b + c) = a^2b^2c^2 ;$$

cette condition exprime que R est le rayon du cercle circonscrit à un triangle de côtés a, b, c. Le quadrilatère se réduit alors à ce triangle.

Nous terminons ici nos développements sur la question 1499, espérant qu'un lecteur de *Mathesis* complétera l'examen des différents cas et trouvera une résolution purement algébrique de l'équation proposée.

(J. Neuberg)

M. Barisien en nous adressant la question 1498 avait indiqué la solution

$$x' = \frac{aA + bB + cC - abc}{4R^2}, \quad x_2 = \frac{-aA + bB - cC - abc}{4R^2}, \text{ etc.}$$

où $A = \sqrt{(4R^2 - b^2)(4d^2 - c^2)}$, $B = \sqrt{(4R^2 - a^2)(4d^2 - c^2)}$, ···,

ce qui revient à

$$x = R \sin(\alpha + \beta + \gamma), \quad x = R \sin(-\alpha + \beta - \gamma) \cdots$$

si l'on remplace $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, ··· par leurs valeurs.

Question 1661.

(Voir *Mathesis*, (3), VIII, 79).

On considère les cercles qui sont tangents à une parabole fixe et qui passent par son foyer. Montrer que la seconde sécante du cercle et de la

Digitized by Google

parabole passe par un point fixe. Trouver le lieu du point d'intersection de cette sécante avec la tangente au point de contact du cercle et de la parabole.

(E. N. Barisien)

Solution par MM. J. Rose. (Chimay), Lez et Dalle. Soient

$$y^2 = 2px, \quad y = mx + n$$

les équations de la parabole et de la seconde sécante. Les coniques tangentes à la parabole au point (x_1, y_1) ont une équation de la forme

$$y^2 - 2px = \lambda[yy_1 - p(x + x_1)][y - mx - n] = 0.$$

Le cercle de ce faisceau passant par le foyer $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ est déterminé par les égalités

$$1 - \lambda y_1 = -\lambda mp, \quad my_1 + p = 0,$$
$$2p \cdot \frac{p}{2} + \lambda p \left(\frac{p}{2} + n_1\right)\left(n + m\frac{p}{2}\right) = 0,$$

d'où l'on tire

$$m = -\frac{p}{y_1}, \quad \lambda = \frac{y_1}{y_1^2 + p^2}, \quad n = -\frac{3p^2}{2y_1}.$$

Par conséquent, l'équation de la seconde sécante est

$$2yy_1 + p(2x + 3p) = 0.$$

Cette droite passe donc par le point de l'axe Ox qui a pour abscisse $-\frac{3p}{2}$.

Pour trouver le lieu cherché, il suffit d'éliminer x_1, y_1 entre les équations

$$y_1^2 = 2px_1, \quad yy_1 - p(x + x_1) = 0,$$
$$2yy_1 + p(2x + 3p) = 0;$$

on trouve ainsi la cubique

$$4(3p + 4x)y^2 + p(3p + 2x)^2 = 0.$$

Remarque. Cette courbe est formée de deux branches infinies, symétriques par rapport à l'axe focal; elle a pour asymptote la droite $x = -\frac{3p}{4}$ et au point double $\left(-\frac{3p}{2}, 0\right)$ les tangentes ont pour coefficient angulaire $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. On s'explique aisément que le point de l'axe où passe constamment la seconde sécante commune de la parabole et du

Digitized by Google

cercle variable est un point double ayant pour tangentes les tangentes menées de ce point à la parobole; le cercle correspondant est alors doublement tangent à la parabole.

×Question 1668.

(Voir *Mathesis* (3), VIII, p. 79.)

On considère les deux égalités

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0, \quad \frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

Démontrer que la seconde est une conséquence de la première. La réciproque est-elle vraie? (NANSON)

Solution par M. E. N. BARISIEN. Chassons les dénominateurs et ordonnons par rapport à c; il vient

$$c^3-(a+b)c^2-(a^2+b^2-3ab)c+(a+b)(a-b)^2=0, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &c^5-2(a+b)c^4+(a^2+b^2+4ab)c^3+(a+b)(a^2+b^2-4ab)c^2 \\ &\quad -[2(a-b)^2(a^2+b^2)-a^2b^2]c+(a^3+b^3)(a-b)^2=0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

On voit assez facilement que le premier membre de (4) est divisible par celui de (3); le quotient, qui est

$$c^2-(a+b)c+a^2+b^2-ab, \tag{5}$$

s'annule pour

$$c=\frac{a+b\pm(a-b)\sqrt{3}}{2}. \tag{6}$$

Ainsi le premier membre de (4) est le produit de (5) par le premier membre de (3); donc l'équation (2) est une conséquence de (1), mais la réciproque n'est pas vraie. Si l'on donne l'équation (2), il en résulte l'équation (1) ainsi que les valeurs (6).

REMARQUE. Il est curieux d'observer que les expressions (6) sont les racines doubles de l'équation

$$\sqrt[7]{x-a}+\sqrt[7]{b-x}=\sqrt[7]{b-a}.$$

En effet, si l'on pose

$$x-a=y^7, \quad b-x=z^7, \quad b-a=A^7,$$

on est amené à résoudre le système

$$y+z=A, \quad y^7+z^7=A^7.$$

Digitized by Google

La première équation donne

$$y^7 + z^7 = (y+z)^7 - 7yz(y+z)^5 + 14y^2z^2(y+z)^3 - 7y^3z^3(y+z);$$

en remplaçant $y+z$ par A, y^7+z^7 par A^7 et simplifiant, on obtient

$$yz(yz - A^2)^3 = 0.$$

On en conclut soit $y=0$, soit $z=0$, soit $yz = A^2$, les deux premières solutions correspondent aux racines $x=a$, $x=b$; la troisième donne l'équation double $yz - A^2 = 0$ ou

$$(x-a)(b-x) = (b-a)^2,$$

qui a pour racines les expressions (6).

Notes. 1. Voici une solution donnée par l'*Educational Times* auquel nous avons emprunté la question 1662. Soient M, N les premiers membres des équations proposées. En effectuant les multiplications indiquées on trouve

$$M\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right) = N + \Sigma\frac{a}{b-c}\left(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)$$
$$= N + \frac{\Sigma a(b-c)}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

Comme $\Sigma a(b-c) = 0$, on voit que l'équation $M=0$ entraine $N=0$, mais l'équation $N=0$ se décompose en deux autres : $N=0$ ou $\Sigma\frac{1}{b-c}=0$, dont la seconde peut s'écrire $\Sigma a^2 - \Sigma bc = 0$ ou $\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] = 0$, de manière que si a, b, c sont des nombres réels distincts, l'équation $M=0$ est une conséquence de $N=0$.

2. M. Constantinescu observe que

$$\frac{a}{b-c} = M - \left(\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right) = M + \frac{(b-c)(b+c-a)}{(c-a)(a-b)};$$

d'où

$$\frac{a}{(b-c)^2} = \frac{M}{b-c} + \frac{b+c-a}{(c-a)(a-b)}, \cdots$$

$$N = M\Sigma\frac{1}{b-c} + \frac{\Sigma(b^2-c^2) - \Sigma a(b-c)}{(b-c)(c-a)(a-b)} = M\Sigma\frac{1}{b-c}.$$

Il en tire ensuite les conséquences indiquées ci-dessus et donne les identités suivantes relatives à trois lettres a, b, c :

$$\Sigma\frac{1}{(b-c)^2} = \Sigma^2\frac{1}{b-c},$$

Digitized by Google

$$\Sigma\frac{a}{(b-c)^3} = M\Sigma\frac{1}{(b-c)^2} + \frac{\Sigma a}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$
$$\equiv \Sigma\frac{a}{b-c}\,\Sigma^2\frac{1}{b-c} + \frac{\Sigma a}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

Donc si $\Sigma\frac{a}{b-c} = 0$, on a

$$\Sigma\frac{a}{(b-c)^3} = \frac{\Sigma a}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

Solution partielle par M. D.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS

Concours d'admission en 1908 (115e promotion)

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

I. Construire la courbe représentée par la fonction

$$y = 4e\frac{\log\frac{x}{e}}{(\log x)^2}.$$

II. Soit [c] l'arc de cette courbe qui a pour origine le point A où elle traverse l'axe des x, et pour extrémité le point B qui correspond au maximum de y. Calculer l'aire [Σ] comprise entre l'arc [c], l'axe des x et l'ordonnée BD de B.

III. Soit M un point quelconque de [c] Menons la perpendiculaire PM à l'axe des x; soit N le point où elle rencontre la corde AB. Menons par N la parallèle à l'axe des x qui coupe en R l'arc [c] et en Q la parallèle à l'axe des y menée par A. Portons sur le prolongement de PM une longueur MS égale à QR.

Lorsque M décrit [c], S décrit un arc de courbe [c'] : cet arc passe au point A. Calculer, à un centième près, le coefficient angulaire de la tangente à cet arc [c'] au point A.

IV. Soit [Σ'] l'aire balayée par le segment de droite MS lorsque M décrit [c]. Montrer qu'il existe entre [Σ] et [Σ'] une relation numérique, qui subsiste quand on remplace dans les constructions précitées l'arc [c] par un autre arc de courbe quelconque ayant les mêmes extrémités A et B, pourvu toutefois que ce nouvel arc soit situé au dessus de AB, et ne soit pas rencontré en plus d'un point par une parallèle quelconque à l'un ou à l'autre des axes de coordonnées.

Digitized by Google

NOTA. Le signe log représente les logarithmes népériens dont la lettre e représente la base.

Les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET MÉCANIQUE.

On considère un plan P et un système (S) de deux forces appliquées à un solide invariable. Ce système, par hypothèse, n'est équivalent, ni à une force unique, ni à un couple, ni à zéro.

I. Démontrer sans calcul que le système (S) peut être remplacé, en général, par deux forces, l'une F_1 normale au plan P, l'autre F_2 située dans ce plan Indiquer les conditions de possibilité du problème.

II. Soient Ox, Oy, Oz trois axes de coordonnées rectangulaires, X, Y, Z, L, M, N les six coordonnées du système (S), c'est-à-dire les projections sur les axes de la résultante générale et du moment résultant par rapport au point O.

Soit enfin $uv + vy + wz + h = 0$ l'équation du plan P.

On demande de calculer les coordonnées x, y, z du point de rencontre A de la force F_1 avec le plan P, ainsi que l'équation du plan Π mené perpendiculairement au plan P par la droite D qui porte F_2.

III. On assujettit le plan P à passer par une droite fixe donnée Δ. Trouver le lieu géométrique $[c]$ du point A et le lieu géométrique $[\Sigma]$ de la droite D, quand le plan P pivote autour de la droite donnée Δ.

IV. Former l'équation réduite de la surface $[\Sigma]$ et discuter la nature de cette surface suivant les positions diverses de la droite donnée Δ.

QUESTIONS D'EXAMEN.

×**1898**. Si deux triangles ABC, A'B'C' sont inscrits dans une même circonférence et si leur centre d'homologie P est le centre de gravité de ABC, on a

$$\frac{PA}{PA'} + \frac{PB}{PB'} + \frac{PC}{PC'} = 3,$$

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{(2b^2+2c^2-a^2)(2c^2+2a^2-b^2)(2a^2+2b^2-c^2)}$$

(VERCELLIN)

A déduire de (M_a est le milieu de BC) :

$$m_a \cdot M_a A' = \frac{a^2}{4},$$

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PA}{\frac{1}{3}m_a + \frac{a^2}{4m_a}} = \frac{8m_a^2}{3a^2+4m_a^2} = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{a^2+b^2+c^2}, \ldots$$

Digitized by Google

1399. Sur une parabole de sommet A et de foyer F on considère une série de points $M_1, M_2, M_3, \cdots M_n$ qui se projettent sur l'axe en $P_1, P_2, P_3, \cdots$ et qui sont tels que les droites $M_1P_2, M_2P_3, M_3P_4 \cdots$ soient normales en $M_1, M_2, M_3, \cdots$ à la parabole. 1° Calculer les sommes

$$\overline{P_1M_1}^2 + \overline{P_2M_2}^2 + \cdots + \overline{P_nM_n}^2, \quad \overline{M_1P_2}^2 + \overline{M_2P_3}^2 + \cdots + \overline{M_{n-1}P_n}^2,$$

en fonction de $AP_1 = a$. 2° Supposant ensuite que la figure tourne autour de l'axe AF, évaluer les volumes engendrés par les triangles $P_1M_1P_2$, $P_2M_2P_3$, $\cdots$ Différence entre deux volumes consécutifs quelconques. (*Bacc. lat-sc. et sc.-lang., Clermont*, 1906).

1° $AP_1 = a$, $AP_2 = a + p$, $AP_3 = a + 2p, \cdots$, $AP_{n-1} = a + (n-2)p$;

$$\overline{M_1P_1}^2 + \overline{M_2P_2}^2 + \cdots + \overline{M_nP_n}^2 = 2pa + 2p(a+p) + \cdots + 2p[a + (n-1\,p] =$$
$$= 2pan + p^2n(n-1),$$

$$\overline{M_1P_2}^2 + \overline{M_2P_3}^2 + \cdots + \overline{M_{n-1}P_n}^2 = p(n-1\,[4a + (2n-3)p]$$

2° $$\text{vol } P_1M_1P_2 = \frac{1}{3}\pi p.\,\overline{M_1P_1}^2, \quad \text{vol } P_2M_2P_3 = \frac{1}{3}\pi p.\,\overline{M_2P_2}^2, \cdots,$$
$$\text{vol } P_{n-1}M_{n-1}P_n = \frac{1}{3}\pi p.\,\overline{M_{n-1}P_{n-1}}^2.$$

La différence entre deux volumes consécutifs $= \frac{2}{3}\pi p^2$.

×**1400.** Résoudre l'équation

$$(x^2 - 6ax + a^2)^2 + 16ax(x-a)^2 = b^4.$$

Elle se réduit à $(x+a)^4 = b^4$. (E. N. Barisien)

×**1401.** L'équation

$$4(x^2+2)^2 - x(4x-7)(7x+8) = 0$$

a deux racines doubles. (E. N. Barisien)

En effet, le premier membre se ramène à $(2x^2 - 7x - 4)^2$.

×**1402.** Les polaires d'un point P par rapport à deux cercles donnés se coupent en Q. Lorsque P parcourt une droite d perpendiculaire à la ligne des centres, le point Q parcourt la symétrique de d par rapport à l'axe radical. (*Communiqué par* M. Tummers)

×**1403.** Montrer que l'équation

$$\frac{(x^2+x+1)(a-1)(b-1)}{(x-a)(x-b)} + \frac{(x-1)(a^2+a+1)(b-1)}{(x-a)(a-b)}$$
$$+ \frac{(x-1)(b^2+b+1)(a-1)}{(x-b)(a-b)} + x^2 = 19$$

n'a que deux racines, qui sont indépendantes de a et b.

(E. N. Barisien)

L'ensemble des trois premiers termes se réduisant à 3, l'équation se réduit à $x^2 = 16$.

Digitized by Google

QUESTIONS PROPOSÉES.

1681. Si deux diagonales d'un quadrilatère sont rectangulaires, leur point d'intersection est le foyer d'une conique inscrite au quadrilatère et ayant pour directrice la troisième diagonale. (ZACHARIAS)

Le cas particulier des trois paraboles touchant deux côtés d'un triangle et les hauteurs correspondantes (*Mathesis*, 1898, p. 131) rentre dans la proposition précédente.

×**1682.** Si a, b, c, d, e sont positifs, on a

$$\left(\frac{abc}{de}\right)^4+\left(\frac{bcd}{ea}\right)^4+\left(\frac{cde}{ab}\right)^4+\left(\frac{dea}{bc}\right)^4+\left(\frac{eab}{cd}\right)^4 > ab^2c+bc^2d+cd^2e+de^2a+ea^2b.$$

(W. GREENSTREET)

1683. Déterminer une courbe (c), telle que la portion de la tangente comprise entre le point de contact M et le point N où la tangente en M coupe une droite donnée d, soit vue d'un point fixe O sous un angle constant α. Application à $\alpha = 90°$. (ABRAMESCU).

1684. Sur une cissoïde donnée Γ on considère le point de rebroussement O et un autre point fixe A. Un cercle (C), de rayon variable, passant par O et A, recoupe Γ en un point B dont la tangente est BT. Trouver le lieu de l'intersection de BT avec le diamètre de (C) qui passe par un point fixe P. (P. DE LEPINEY)

×**1685.** Soit OABC un tétraèdre qui a un trièdre trirectangle en O. La sphère qui a pour grand cercle le cercle circonscrit au triangle ABC recoupe les arêtes AO, BO, CO aux points A′, B′, C′. Menons OH perpendiculaire au plan ABC, et appelons G, G′ les centres de gravité des triangles ABC, A′B′C′.

Démontrer 1° que la puissance du point O par rapport à la sphère est égale à $-\overline{OH}^2$; 2° que la corde interceptée par la sphère sur la droite $OH = 2OH\sqrt{2}$; 3° que le plan A′B′C′ est perpendiculaire à la droite OG; 4° que OG passe par le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre OABC. (J. NEUBERG)

Rectifications. Page 138, 4e ligne en remontant, au lieu de B′A′C′ = 120°, lire : B′A′C′ = 60°. — Page 115, dernière ligne, au lieu de $x_3 = -\frac{b}{c}$, lire : $x_3 = -\frac{c}{b}$.

Digitized by Google

SUR DEUX COMPLEXES RECTILIGNES DU QUATRIÈME DEGRÉ (*)

par **J. NEUBERG**
Professeur à l'Université de Liége

I

1. Soient $A_1 A_2 A_3 A_4 \equiv T_a$, $B_1 B_2 B_3 B_4 \equiv T_b$ deux tétraèdres quelconques; nous désignerons par α_i, β_i les plans de leurs faces opposées à A_i, B_i. Une droite quelconque g rencontrant ces plans en C_i, D_i, nous représenterons par γ, δ les rapports anharmoniques des quaternes de points $C_1 C_2 C_3 C_4$, $D_1 D_2 D_3 D_4$, qui sont égaux aux rapports anharmoniques des quaternes de plans $g(A_1 A_2 A_3 A_4)$, $g(B_1 B_2 B_3 B_4)$.

Appelons *complexe bitétraédral* et désignons par L le complexe des droites g telles que l'on ait $\delta = l\gamma$, l étant une constante. L'égalité de définition peut encore prendre les formes

$$(C_1 C_2 C_3 C_4)(D_1 D_2 D_4 D_3) = \frac{1}{l},\ g(A_1 A_2 A_3 A_4) \cdot g(B_1 B_2 B_4 B_3) = \frac{1}{l}.$$

Le cas particulier de $l = 1$ est mentionné par R. Sturm dans sa *Liniengeometrie*, t. I, p. 67. Ce géomètre démontre que le complexe est alors du quatrième degré, et qu'il se décompose en un complexe linéaire et un complexe cubique lorsque T_a, T_b sont des tétraèdres de Möbius.

2. Le raisonnement suivant pour trouver le degré de L correspond par voie de dualité à celui de R. Sturm.

Lorsqu'une droite p tourne autour de l'un de ses points P de manière que le rapport anharmonique $p(A_1 A_2 A_3 A_4)$ garde une valeur constante μ, elle engendre un cône quadratique K_a; lorsque le rapport $p(B_1 B_2 B_3 B_4)$ conserve la valeur $l\mu$, p engendre un cône quadratique K_b. Les génératrices communes à ces deux cônes appartiennent évidemment au complexe L. Faisons maintenant varier μ et coupons les cônes par un plan π mené par P; soient a, a' les génératrices de K_a et b, b' et celles de K_b situées dans le plan π. Il existe entre le faisceau de droites a, a' et celui de b, b' une correspondance $(2, 2)$; les quatre coïncidences de cette correspondance appartiennent au complexe L, lequel, par conséquent, est du quatrième degré.

(*) Extrait des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1908, t. XXXII, 1re partie, pp. 114-123.

Digitized by Google

3. Cherchons l'équation de L.

Le tétraèdre de référence étant quelconque, désignons par (y_1, y_2, y_3, y_4), $(z_1, \ldots)$ les coordonnées de deux points quelconques Y, Z de la droite g, par (f_1, f_2, f_3, f_4) celles de A, et soient

$$\alpha_x \equiv a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0,\quad \alpha'_x = 0,\quad \alpha''_x = 0,\quad \alpha'''_x = 0,$$

$$\beta_x \equiv b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0,\quad \beta'_x = 0,\quad \beta''_x = 0,\quad \beta'''_x = 0,$$

les équations des plans α, ..., β, ...

Les coordonnées du point C_1 sont de la forme $y_1 - m_1 z_1$, $y_2 - m_1 z_2$, ...; on trouve en les substituant dans l'équation du plan α :

$$m_1 = -\frac{\alpha_y}{\alpha_z},\quad m_2 = -\frac{\alpha'_y}{\alpha'_z},\quad m_3 = -\frac{\alpha''_y}{\alpha''_z},\quad m_4 = -\frac{\alpha'''_y}{\alpha'''_z}.$$

Le rapport $(C_1C_2C_3C_4)$ a pour expression

$$r = \frac{m_3 - m_1}{m_3 - m_2} : \frac{m_4 - m_1}{m_4 - m_2}.$$

La règle de [illegible]

[illegible]

[illegible]

Représentons ces déterminants par ϵ_{24}; on voit facilement que l'équation $\epsilon_{24} = 0$ est celle du complexe spécial qui a pour axe la droite $A_2 A_4$ (*). Avec des notations analogues pour les autres complexes spéciaux qui ont pour axes des arêtes de T_a et avec la notation η_{ik} pour le complexe spécial qui a pour axe l'arête $B_i B_k$ de T_b, on trouve pour l'équation de L :

$$\epsilon_{23}\,\epsilon_{14}\,\eta_{24}\,\eta_{13} = l\,.\,\epsilon_{24}\,\epsilon_{13}\,\eta_{23}\,\eta_{14}\,.$$

4. Cette équation met en évidence des éléments remarquables de L.

D'abord, des solutions telles que $\epsilon_{23} = \eta_{23} = 0$, $\epsilon_{23} = \eta_{14} = 0$ montrent que L renferme les huit congruences linéaires qui ont pour directrices les couples d'arêtes (**)

$$(A_2 A_3,\ B_2 B_3),\ (A_2 A_3,\ B_1 B_4),\ (A_1 A_4,\ B_1 B_4),\ (A_1 A_4,\ B_2 B_3),$$
$$(A_2 A_4,\ B_2 B_4),\ (A_2 A_4,\ B_1 B_3),\ (A_1 A_3,\ B_1 B_3),\ (A_1 A_3,\ B_2 B_4)\ ;$$

pour les rayons des quatre premières, on a $\gamma = \delta = \infty$; pour les rayons des autres, $\gamma = \delta = 0$.

Des solutions telles que $\epsilon_{23} = \epsilon_{24} = 0$, $\eta_{24} = \eta_{23} = 0$, on conclut que toute droite menée par un sommet ou située dans une face des tétraèdres T_a, T_b fait partie du complexe L ; pour une telle droite l'une des quantités γ, δ est indéterminée. Ainsi, *les sommets et les faces de* T_a *et de* T_b *sont des points et des plans principaux du complexe bitétraédral.*

5. Le complexe L contient la congruence M définie par le système d'équations

$$(C_1 C_2 C_3 C_4) = \mu,\quad (D_1 D_2 D_3 D_4) = l\mu\ ;$$

appelons M_a, M_b les complexes tétraédraux correspondants.

(*) Car les déterminants égalés à zéro expriment que les quatre plans $a'_x = 0$, $a'''_x = 0$, $u_x = 0$, $v_x = 0$ ont un point commun, ou que les quatre points A_2, A_4, Y, Z sont dans un même plan. D'ailleurs, on aurait aussi $m_3 - m_1 = 0$, ce qui suppose les points C_1, C_3 confondus.

(**) Les arêtes $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, $B_1 B_2$, $B_3 B_4$ ne figurent pas comme directrices lorsque la constante l a une valeur quelconque ; mais lorsque $l = 1$, l'équation $(C_1 C_2 C_3 C_4) = (D_1 D_2 D_3 D_4)$ est équivalente à $(C_1 C_3 C_2 C_4) = (D_1 D_3 D_2 D_4)$ et les arêtes $A_1 A_2$, $A_3 A_4$, ... sont également directrices de congruences de L.

Digitized by Google

Pour construire des rayons de M_a, on peut avoir recours à la construction des complexes de Reye d'après Hirst. En effet, projetons le quaterne $C_1 C_2 C_3 C_4$ à partir de la droite $A_1 A_2$ sur la droite $A_3 A_4$; les points C_4, C_3 se projettent en A_3, A_4 et les projections de C_1, C_2 sont les intersections A_2', A_1' de $A_3 A_4$ avec les droites $A_2 C_1$, $A_1 C_2$. On a

$$(C_1 C_2 C_3 C_4) = (A_2' A_1' A_4 A_3) = (A_1' A_2' A_3 A_4) = \mu,$$

et toute droite qui s'appuie sur les droites $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$ appartient au complexe M_a, parce que ses points d'intersection avec α_1, α_2, α_3, α_4 appartiennent également aux plans $A_1 A_2 C_1$, $A_1 A_2 C_2$, $A_1 A_2 C_3$, $A_1 A_2 C_4$.

On conclut de là que le complexe M_a contient toutes les congruences linéaires qui ont pour directrices deux droites $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$ menées à deux points A_1', A_2' de $A_3 A_4$ tels que $(A_1' A_2' A_3 A_4) = \mu$. Ces directrices $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$ se correspondent dans deux faisceaux projectifs que nous désignerons par (A_1, α_2), (A_2, α_1).

Semblablement, si B_1', B_2' sont deux points variables de la droite $B_3 B_4$ tels qu'on ait $(B_1' B_2' B_3 B_4) = l\mu$, le complexe M_b est formé par les droites s'appuyant sur les droites $B_1 B_1'$, $B_2 B_2'$. Ces dernières se correspondent dans deux faisceaux projectifs (B_1, β_2), (B_2, β_1).

Par suite, *la congruence* M *est le lieu des droites qui rencontrent à la fois deux rayons homologues des faisceaux projectifs* (A_1, α_2), (A_2, α_1) *et deux rayons homologues des faisceaux projectifs* (B_1, β_2), (B_2, β_1).

Cette congruence est du quatrième ordre et de la quatrième classe.

Les rayons de M qui s'appuient sur les droites $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$ supposés fixes et sur deux rayons variables $B_1 B_1'$, $B_2 B_2'$ des faisceaux (B_1, β_2), (B_2, β_1) engendrent une surface F du quatrième ordre. Car les rayons qui partent d'un point C_1 donné sur $A_1 A_1'$ sont donnés par l'intersection du plan $C_1 A_2 A_2'$ avec le cône du complexe M_b qui a son sommet en C_1; par conséquent $A_1 A_1'$ et $A_2 A_2'$ sont des directrices doubles de la surface F.

Comme $B_1 B_3$ et $B_2 B_3$, $B_1 B_4$ et $B_2 B_4$ sont des éléments homologues des faisceaux (B_1, β_2), (B_2, β_1), la surface F contient les droites menées par B_3 ou B_4 et s'appuyant sur $A_1 A_1'$ et $A_2 A_2'$; elle contient

Digitized by Google

aussi les droites joignant les points d'intersection de A_1A_1', A_2A_2' avec l'un des plans $B_1B_2B_3$, $B_1B_2B_4$; par suite ces plans touchent F.

6. Le complexe bitétraédral L peut se décomposer en un complexe linéaire L' et un complexe cubique L''. Cela arrive lorsque l'une des arêtes A_1A_3, A_2A_4 est dirigée suivant l'une des arêtes B_1B_3, B_2B_4.

Considérons le cas particulier où $\beta_1 \equiv \alpha_4$, $\beta_4 \equiv \alpha_1$, $l = 1$, de manière que les faces de T_a et T_b sont $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_1)$ et que l'égalité de définition est

$$(D_1 D_2 D_3 C_1) = (C_1 C_2 C_3 D_1).$$

L'' est maintenant le complexe des droites g qui rencontrent les couples de plans $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3$ en des couples de points d'une involution. Désignons par a_1, a_2, a_3 les arêtes du trièdre $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ et par b_1, b_2, b_3 celles du trièdre $\beta_1\beta_2\beta_3$, et soient $X_1X_2X_3$, $Y_1Y_2Y_3$ les sections de ces trièdres par un même plan μ mené par g. Les points C_1, C_2, C_3 sont situés sur les côtés du triangle $X_1X_2X_3$ et forment une involution avec les points D_1, D_2, D_3; on en conclut que les droites X_1D_1, X_2D_2, X_3D_3 passent par un même point U. Par conséquent, *le complexe cubique* L'' *est le lieu des droites* g *qui rencontrent les faces du trièdre* $\beta_1\beta_2\beta_3$ *en trois points* D_1, D_2, D_3 *tels que les plans* a_1D_1, a_2D_2, a_3D_3 *se coupent suivant une même droite* (*).

Si les plans a_1D_1, a_2D_2, a_3D_3 doivent rencontrer les plans α_1, α_2, α_3 suivant trois droites coplanaires, la droite g engendre un complexe cubique tel que

$$(D_1 D_2 D_3 C_1) = -(C_1 C_2 C_3 D_1).$$

Considérons encore le cas où $B_1 \equiv A_4$, $B_4 \equiv A_1$, $l = 1$. L'égalité

$$g(A_1 A_2 A_3 B_1) = g(B_1 B_2 B_3 A_1)$$

(*) J'ai traité ce complexe sous le nom de *complexe de Grassmann* dans MATHESIS, 1902. Si le plan μ reste fixe, la droite g enveloppe une courbe de la 3e classe et le point U décrit une cubique, ainsi qu'il résulte d'un théorème de Grassmann.

Digitized by Google

définit un complexe cubique (et un complexe spécial). Les plans $g\,A_1$ et $g\,B_1$, $g\,A_2$ et $g\,B_2$, $g\,A_3$ et $g\,B_3$ sont en involution. Les plans $g\,A_1$, $g\,A_2$, $g\,A_3$ rencontrent respectivement les droites B_2B_3, B_3B_1, B_1B_2 en trois points E_1, E_2, E_3 qui sont en ligne droite.

Si l'on demande que les droites B_1E_1, B_2E_2, B_3E_3 soient concourantes, la droite g engendre un complexe cubique caractérisé par l'équation

$$g(A_1A_2A_3B_1) = -g(B_1B_2B_3A_1).$$

II

1. Soient $A_1A_2A_3A_4 \equiv T_a$, $B_1B_2B_3B_4 \equiv T_b$ deux tétraèdres quelconques; désignons par α_i, β_i les plans des faces opposées à A_i, B_i.

g étant une droite quelconque, représentons par g_i l'intersection des plans B_ig, α_i, et par γ_i le plan A_ig_i. Je vais étudier le complexe des droites g telles que les quatre plans γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 aient un point commun G.

La génération de ce complexe que j'appellerai F, offre quelque analogie avec celle des cubiques d'après Grassmann. Le cas particulier où g_i est la projection orthogonale de g sur α_i a été traité récemment par M. L. Godeaux (*).

2. Cherchons le nombre des droites g passant par un point donné S dans un plan donné δ. A cet effet, examinons la nature de la correspondance entre quatre droites h_1, h_2, h_3, h_4 menées par S dans le plan δ et telles que les plans B_1h_1, B_2h_2, B_3h_3, B_4h_4 rencontrent respectivement les plans α_1, α_2, α_3, α_4 suivant quatre droites h'_1, h'_2, h'_3, h'_4 situées dans quatre plans $A_1h'_1$, $A_2h'_2$, $A_3h'_3$, $A_4h'_4$ ayant un point commun. On peut prendre arbitrairement les droites h_1, h_2, h_3; les plans $A_1h'_1$, $A_2h'_2$, $A_3h'_3$ auront en général un point commun H; la droite h'_4 devra passer par le point de rencontre H_4 de la droite A_4H_4 avec le plan α_4 et être située dans un plan passant par B_4 et S. Il résulte de là que h_4 est l'intersection des plans δ et B_4SH_4. Par conséquent il existe entre les droites h_1, h_2, h_3, h_4 une

---

(*) Voir BULLETIN SCIENTIFIQUE DE L'ASSOCIATION DES ÉLÈVES DES ÉCOLES SPÉCIALES DE LIÉGE, nov. 1907.

Digitized by Google

relation quadrilinéaire; or, celle-ci présente quatre coïncidences ($h_1 \equiv h_2 \equiv h_3 \equiv h_4$). Donc le complexe F est du quatrième ordre (*).

3. Prenons T_a pour tétraèdre de référence. Soient (y_1, y_2, y_3, y_4), $(z_1, \ldots)$ les coordonnées de deux points quelconques Y, Z d'un rayon g de F, et $b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}, b_{i4}$ celles de B_i. Le plan $B_1 g$ qui passe par les trois points B_1, Y, Z, a pour équation

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

En faisant $x_1 = 0$ on trouve pour l'équation du plan $A_1 g_1$

$$\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Représentons cette équation par

$$C_{12} x_2 + C_{13} x_3 + C_{14} x_4 = 0. \qquad (2)$$

Les coefficients ont pour expression

$$C_{12} = - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{14} \\ y_1 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = - (b_{11} p_{34} + b_{13} p_{41} + b_{14} p_{13}), \ldots, \qquad (3)$$

où les quantités $p_{ik} \equiv y_i z_k - y_k z_i$ sont les coordonnées radiales de g. L'équation $C_{12} = 0$ exprime que les points Y, Z, B_1, A_2 sont dans un même plan; elle est donc l'équation du complexe spécial qui a pour axe la droite $B_1 A_2$. Les autres symboles C_{ik} ont une signification analogue.

(*) M. Godeaux emploie la même démonstration fondée sur une généralisation du principe de correspondance de Chasles, qu'il attribue à F. Deruyts.

Digitized by Google

La condition que les quatre plans γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 ont un point commun G, donne

$$\begin{vmatrix} 0 & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & 0 & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & 0 & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & 0 \end{vmatrix} \cdot 0 =$$

Telle est donc l'équation du complexe F en coordonnées p_{ik}; elle est du 4e degré.

3. A un point donné G correspondent en général deux droites g.

En effet, soit G_i le point de rencontre de la droite $A_i G$ avec le plan α_i; la droite g_i doit passer par G_i et, par suite, la droite g doit s'appuyer sur la droite $B_i G_i$. Or, il existe en général deux droites qui s'appuient sur les quatre droites $B_1 G_1$, $B_2 G_2$, $B_3 G_3$, $B_4 G_4$.

On arrive à la même conclusion en considérant, dans les équations des plans γ_1, γ_2, .., les quantités x_1, x_2, x_3, x_4 comme les coordonnées de G et les p_{ik} comme variables. L'équation (1) exprime maintenant que les points G_1, B_1, Y, Z sont situés dans un même plan; par suite l'équation (2) où l'on donne à C_{12}, C_{13}, C_{14} les valeurs (3) représente le complexe spécial qui a pour axe la droite $B_1 G_1$. Par conséquent les équations de γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 ainsi interprétées représentent quatre complexes spéciaux ayant pour axes $B_1 G_1$, $B_2 G_2$, $B_3 G_3$, $B_4 G_4$ et donnent, en général, par leur combinaison avec l'identité fondamentale

$$p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0,$$

deux systèmes de valeurs de p_{ik}.

Si les quatre premières équations se réduisaient à trois, les droites g qui correspondraient au point G seraient les génératrices d'une quadrique réglée.

4. Toute droite g qui passe par B_1 fait partie du complexe F; car les plans γ_2, γ_3, γ_4 qui sont déterminés, se coupent en un point G et on peut prendre pour le plan γ_1 celui qui passe par A, G et la trace de g sur α_1.

Lorsque g engendre un faisceau (B_1, μ), les droites g_2, g_3, g_4 tournent autour des points de rencontre E_2, E_3, E_4 des droites

Digitized by Google

B_2B_1, B_3B_1, B_4B_1 avec les plans α_2, α_3, α_4 et engendrent des faisceaux projectifs avec le faisceau (B_1, μ); par suite les plans γ_2, γ_3, γ_4 se correspondent dans trois faisceaux projectifs et leur intersection G engendre une cubique gauche (*). Aux rayons de la gerbe B_1 correspondent les points d'une surface cubique.

Ainsi, *les points* B_1, B_2, B_3, B_4 *sont des points principaux du complexe.*

5. Le plan β_1 renferme trois faisceaux de rayons de F ayant pour centres B_2, B_3, B_4. Les courbes du complexe étant de la 4e classe, il doit encore renfermer un quatrième faisceau de rayons.

Cette conclusion peut être établie directement. En effet, soient d_2, d_3, d_4 les intersections du plan β_1 avec les plans α_2, α_3, α_4, et g une droite du complexe située dans le plan β_1 et ne passant par aucun des points B_2, B_3, B_4. Les droites g_2, g_3, g_4 coïncident évidemment avec d_2, d_3, d_4, de sorte que le point G est l'intersection des trois plans A_2d_2, A_3d_3, A_4d_4. La droite g_1 doit passer par la trace N de la droite A_1G sur le plan α_1, et la droite g par la trace de la droite B_1N sur le plan β_1.

Prenons pour g la droite B_2B_3, qui rencontre α_2 en K_2, α_3 en K_3. Les droites g_1, g_4 étant déterminées, le point G est un point quelconque de l'intersection des plans A_1g_1, A_4g_4 et pour γ_2, γ_3 on peut prendre les plans A_2GK_2, A_3GK_3.

6. Toute droite g passant par A_1 fait partie du complexe. Car g_2, g_3, g_4 passant par A_1, ce point est commun aux plans $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$.

On voit que A_1, A_2, A_3, A_4 sont encore des points principaux.

Le plan α_1 renferme trois faisceaux de rayons qui ont leurs centres en A_2, A_3, A_4; il résulte de là qu'il doit encore renfermer un quatrième faisceau. Cette conclusion se vérifie par un calcul facile. En effet, soit

$$w \equiv M_2x_2 + M_3x_3 + M_4x_4 = 0$$

l'équation du plan A_1g, g étant un rayon de F situé dans le plan α_1. Le plan B_2g a une équation de la forme $w + kx_1 = 0$, avec la condition $w_2 + kb_{21} = 0$, si l'on pose $w_i \equiv M_2b_{i2} + M_3b_{i3} + M_4b_{i4}$.

(*) Lorsque le plan μ passe par B_2B_1, le plan A_2g_2 est fixe et le lieu de G est une conique de ce plan. Lorsque le plan μ coïncide avec la face $B_1B_2B_3$ de T_b les deux plans A_2g_2, A_3g_3 sont fixes et leur intersection est le lieu de G.

Digitized by Google

En faisant $x_2 = 0$ on obtient l'équation du plan $A_2 g$

$$b_{21} w - w_2 x_1 - b_{21} M_2 x_2 = 0.$$

Semblablement, les équations des plans $A_3 g$, $A_4 g$ sont

$$b_{31} w - w_3 z_1 - b_{31} M_3 z_3 = 0, \quad b_{41} w - w_4 z_1 - b_{41} M_4 z_4 = 0.$$

En écrivant que ces équations sont compatibles avec l'équation $w = 0$ on trouve

$$\frac{w_2}{b_{21}} + \frac{w_3}{b_{31}} + \frac{w_4}{b_{41}} = 0.$$

Cette égalité étant du premier degré en M_2, M_3, M_4, le plan $A_1 g$ passe par une droite fixe.

Imp. Joseph Polleunis, Ixelles, Tél. 8060

Digitized by Google

EN VENTE CHEZ LES MÊMES LIBRAIRES

H. Schuermans. Développement d'une puissance quelconque d'un polynome. Gand, Vanderpoorten. 1908. (In-folio de 81 pp.) . . . fr. 6 00

V. v. Dantscher. Vorlesungen über die Weierstrassche Theorie der Irrationalen Zahlen. LT, 1908 (In-8, de VI-80 pp.) . . . . marcs 2 80

A. Schoenflies. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Zweiter Teil. LT, 1908 (In-8 de X-330 pp.) . . marcs 12 00

F. Enriques. Fragen der Elementar-Geometrie. II. Teil. Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Losbarkeit. LT, 1907 (Cartonné in-8 de XII-348 pp.) . . . . . marcs 9 00

O. Richter. Kreis und Kugel in senkrechter Projection LT, 1908 (In-8 de X-188 pp.) . . . . . marcs 4 40

R. Sturm. Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. Erster Band : Die Verwandtschaften zwischen Gebilden erster Stufe. LT, 1908 (Cartonné, in 8 de XII-416 pp.) . . . . . marcs 16 00

M. Fr. Daniels. Essai de Géométrie sphérique en coordonnées projectives. Fribourg (Suisse), O. Gschwend, 1907 (Gr. in-8° de XII-280 pp. avec 44 fig.).

G. Loria. Vorlesungen über darstellende Geometrie. Deutsche Ausgabe von **Fr. Schütte.** I. Die Darstellungsmethoden. LT, 1907 (In-8° cartonné de XI-219 pp.) . . . . . marcs 6 80

E. Müller. Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. Erster Band. LT, 1908 (In-8 cartonné de XIV-368 pp. avec 8 planches). marcs 12 00

Léon Lecornu. Dynamique appliquée. Paris, Doin (Cartonné de 534 pp. in-12) fr. 5.00

R. Gans, Einführung in die Theorie des Magnetismus. LT, 1908 (In-12 de VI-110 pp.) . . . . . marcs 2 40

K. W. Wagner. Elektromagnetische Ausgleichungsvorgänge in Ereileitungen und Kabeln. LT, 1908 (In-12 de IV-110 pp.). . . . . marcs 2 40

Cl. Schaefer. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Electrizität und des Magnetismus LT, 1908 (In-12 de VIII-174 pp. avec portrait de Maxwell). marcs 3 40

Deutches Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik in München. Führer durch die Sammlungen. BGT, 1907 (In 4 obl. de 160 pp.) mark 1 00

101. Ausgabe. B. G. Teubner's Verlag auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften, Technik nebst Grenzwissenschaften. Mit einem Gedenktagebuche für Mathematiker und den Bildnissen von G. Galilei, H. Bruns, M. Cantor, F. R. Helmert, F. Klein, Fr. Kohlrausch, K. Krapelin, C. Neumann, A. Penck, A. Wüllner, sowie einem Anhange Unterhaltungsliteratur enthaltend. Abgeschlossen im April 1908. B. G. Teubner in Leipzig und Berlin (Cartonné in-8° de CXXXII-392-93 pp.).

Catalogue admirablement disposé, contenant un grand nombre de notices scientifiques intéressantes, suivi du beau Mémorial mathématique de F. Müller et accompagné de dix portraits.

Avis aux auteurs de questions résolues.

Prière instante aux auteurs de questions résolues de les envoyer à la Rédaction de *Mathesis* sous une forme qui permette de les livrer à l'impression sans leur faire subir des retouches. Pour cela : 1° Ecrire sur une première ligne le mot *question* précédé ou non de la croix et le n° de la question, et soulignés par une ligne ondulée. 2° Ecrire sur une seconde ligne, avec la parenthèse habituelle, Mathesis, *sans accent*, ce mot étant souligné, avec l'indication de l'endroit où la question a été posée. 3° Transcrire l'énoncé de la question, souligné en entier. 4° Mettre au bout le nom de l'auteur de la question souligné *deux* fois, entre parenthèses. 5° Commencer les premières lignes de la solution, par les mots : *Solution par* soulignés une fois, suivi du nom de l'auteur souligné *deux* fois. 6° Continuer, sans aller à la ligne. 7° Dans le texte de la solution, aller à la ligne chaque fois que l'on doit écrire une égalité ou une équation qui n'est pas très courte. 8° Ecrire $\frac{1}{2}a$ plutôt que $\frac{a}{2}$; $(n-p)$ plutôt que $\overline{n-p}$: *angle* ABC plutôt que $\widehat{ABC}$, $\sqrt{a}$ plutôt que $\sqrt{a}$. 9° Observer les règles de ponctuation *française*, et non celles de la ponctuation *belge*. 10° Laisser une marge.

Prière à nos correspondants de joindre leur adresse PRÉCISE à CHACUN de leurs envois, au bas de leur article.

Digitized by Google

SOMMAIRE.

	Pages
Questions d'analyse, par M. J. Rose (Chimay)	177
×Notes mathématiques	180
Bibliographie	184
Solutions de questions proposées (1107, ×1498, 1661, ×1662)	188
École Polytechnique de Paris. Concours d'admission en 1908 (115e promotion)	197
Questions d'examen (×1398, 1399, ×1400, ×1401, ×1402, ×1403)	198
Questions proposées (1681, ×1682, 1683, 1684, ×1685)	200
Rectifications	200

Les articles marqués d'une croix peuvent être compris. les questions marquées d'une croix peuvent être résolues, au moyen des mathématiques élémentaires.

Les articles destinés à *Mathesis* doivent être adressés *franco de port*, à M. P. MANSION, quai des Dominicains, 6, Gand, ou à M. J. NEUBERG, rue de Sclessin, 6, Liége.

Ils doivent être écrits lisiblement et sur un seul côté de la feuille. Une même feuille doit contenir un seul article ou une seule question résolue, **précédée de l'énoncé de la question** Les auteurs de notes *exigeant des figures* sont priés de *dessiner celle-ci, avec soin, dans le format du journal, sur des feuilles séparées.* Les auteurs de *Questions à résoudre* sont priés de donner, avec les énoncés, *un aperçu des solutions.*

La Rédaction ne renvoie pas les manuscrits non insérés.

Les auteurs d'articles insérés dans *Mathesis,* qui en avertissent la **Rédaction** à temps, *en donnant leur adresse,* peuvent obtenir des tirages à part moyennant 5 francs, par feuille ou fraction de feuille, pour 100 exemplaires, 8 francs pour 50 exemplaires, 2 francs pour 30 exemplaires, frais de remaniement non compris.

Les ouvrages de mathématiques dont on enverra un ou deux exemplaires à M. P. MANSION, seront annoncés ou analysés dans le journal. Prière d'en d'indiquer le prix.

Mathesis paraît, en général, vers le 15 de chaque mois, par livraisons de 24 pages, qui peuvent être accompagnées de suppléments. Prix de l'abonnement annuel (**payable par anticipation**) :

Pour la Belgique	fr. 7 50
Pour l'Etranger.	» 9 00

On s'abonne chez M. AD. HOSTE, rue des Champs, 47, Gand (par un mandat postal, p. ex.) et chez M. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris.

Les réclamations, changements d'adresse, etc.. doivent être adressés, NON aux rédacteurs, mais à M. HOSTE.

Les nouveaux abonnés de *Mathesis* qui en feront la demande à M. MANSION, *en donnant leur adresse exacte,* recevront gratuitement les articles intitulés : 1° *Les premiers principes de la géométrie,* par M. DE TILLY ; 2° *Un autre mémoire* ; 3° *Sur la méthode analytique des anciens,* par M. P. MANSION; 4° *Questions d'admission à l'Ecole militaire de Bruxelles* (1904) (ensemble 47 pages), ou d'autres Mémoires équivalents.

Digitized by Google

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Professeur ordinaire à l'Université de Gand, | Professeur ordinaire à l'Université de Liége
Anciens élèves de l'École normale des sciences,
Membres de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ETRANGERS.

Ut pictura mathesis
PH. BRETON

TROISIÈME SÉRIE.

TOME VIII — SEPTEMBRE-OCTOBRE 1908.

(TOME XXVIII DE LA COLLECTION).

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
21-23, RUE DU CALVAIRE, 21-23

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1908

Digitized by Google

EN VENTE CHEZ M. GAUTHIER-VILLARS A PARIS ET M. HOSTE A GAND.

Mathesis. Tome I (280 pages), 1881. II (272 p.), 1882. III (292 p.), 1883. IV (324 p.), 1884. V (432 p.), 1885. VI (368 p.), 1886. (Rares), VII (408 p.), 1887. VIII (353 p.), 1888. IX (344 p.), 1889. X (312 p.), 1890. XI (347 p.), 1891. XII (356 p.), 1892. XIII (381 p.), 1893. XIV (295 p.). 1894. XV (364 p.), 1895. XVI (396 p.), 1899. XVII (336 p.), 1897. XVIII (348 p.), 1898. XIX (312 p.), 1899. XX (318 p.), 1900. XXI (343 p.), 1901. XXII (334 p.), 1902. XXIII (312 p.), 1903. XXIV (384 p.), 1904. XXV (336 p.), 1905. XXVI (384 p.), 1906. XXVII (344 p.) 1907. Gr. in-8°. Gand, fr. 7 50; à Paris, fr. 9 00.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par Liouville (1836), continué (1875) par H. Resal, publié, depuis 1885, en livraisons trimestrielles, par C. Jordan. Prix de l'abonnement, *pris à Paris*, 30 fr.; union postale 35 00

PGV = PARIS, GAUTHIER-VILLARS LT = LEIPZIG, B. G. TEUBNER.

Hermite. Œuvres. Tome II. PGV, 1908 (In de VI-520 pp. avec portrait). fr. 18 00

J. J. Sylvester. The Collected Mathematical Papers. Volume II. Cambridge, at the University Press, 1908 (Cartonné in 4° de XVI-731 pp. avec 2 pl.) Sh. 18

Z. de Galdeano 1. Consideraciones sobre Filosofia y enseñanza de la Matemática, 1907 (In-8° de 115 pp.). 2. **Exposición sumaria de las teorias matematicas**, 1907 (In-8° de 208 pp.) . . . . . Pesetas 2.00 + 4.00

Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages **Leonard Eulers**. LT, 1907 (In-8 de IV-137 pp. in-8; deux portraits) . . . . . marcs 5 00

P. Stäckel und W. Ahrens. Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuss über die Herausgabe der Werke Leonard Eulers. LT, 1908 (In-8 de XII-184 pp.). . . . . marcs 8 00

F. Rudio. Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. LT, 1907 (In 18. cartonné de X-184 pp.). marcs 4 80

Gino Loria. Il passato ed il presente delle principali Teorie geometriche. Terzaedizione accrescinta di uno Sguardo allo sviluppo della Geometria in quest'ultimo decennio. Torino, H Rinck (Clausen), 1907 (Cartonné in-8 de XXIV-475 pp) . . . . . .

W. Rouse Ball. Récréations mathématiques, etc. Deuxième partie. Deuxième édition française, avec additions, par J. Fitz-Patrick. Paris, Hermann, 1908 (In-12 de VIII-363 pp) . . . . . fr. 5 00

H. Minkowski. Diophantische Approximationen, eine Einführung in die Zahlentheorie. LT, 1907 (Cartonné in-8 de VIII-236 pp.) . marcs 8 00

F. Sommer Vorlesungen über Zahlentheorie. LT, 1907 (In-8, cartonné de VI-361 pp.) . . . . . marcs 11 00

de Laplanche. Etude sur les angles imaginaires. Paris, Hermann, 1908 (In-8 de 135 pp) . . . . . fr. 3 00

E. Fabry. Traité de mathématiques générales, à l'usage des chimistes, physiciens, etc. Paris, Hermann, 1909 In-8 de X-440 pp.). . . . . fr. 9 00

H. Burkhardt. Vorlesungen über die Elemente der Differentialrechnung. LT, 1907 (Cartonné in 8 de XI-252 pp.) . . . . . marcs 6 60

J. Thomal Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fouriersche Reihen LT, 1908 (In-8 cartonné VI-182 pp.). . . . . marcs 7 80

L. Schlesinger. Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. LT, 1908 (In 8 de X-334 pp.). . . . . marcs 10 00

O. Bolza Vorlesungen über Variationsrechnung. Erste Lieferung. LT, 1908 (In-8 de IV-300-1 pp.) . . . . . marcs 8 00

Durège u. Maurer. Theorie der elliptischen Functionen. 5te Auflage. LT, 1908 (In-8, cartonné de VIII-436 pp) . . . . . marcs 11 00

W. Scheibner. Berträge zur Theorie der linearen Transformationen. LT, 1907 (In-8 de 250 pp.) . . . . . marcs 10 00

R. de Montessus Leçons élémentaires sur le Calcul des Probabilités. PGV 1908 (In-8, de VI-191 pp.). . . . . fr. 7 00

E. Czuber. Wahrscheinlichkeits rechnung. Erster Band Zweite, sorgfältig durgechene und erweiterte Auflage. LT, 1908 (In-8 cartonné de X-410 pp.). marcs 12 00

Digitized by Google

SUR LE THÉORÈME DE FEUERBACH;

par M. J. NEUBERG.

Le cercle des neuf points d'un triangle ABC *touche le cercle inscrit et les trois cercles ex-inscrits.*

Les tangentes aux quatre points de contact touchent l'ellipse inscrite au triangle ABC *qui a pour centre le centre de gravité.*

La première de ces propositions est due à Feuerbach qui l'a trouvée en calculant les distances du centre du cercle des neuf points aux centres des cercles tritangents. A qui faut-il attribuer la seconde ?

Voici, avec quelques nouveaux développements, une démonstration analytique assez simple des deux théorèmes précédents ; le principe de cette démonstration se trouve déjà dans un article de G. DE LONGCHAMPS (J. M. E., 1890, p. 106).

1. L'équation d'une conique circonscrite au triangle de référence étant

$$\Sigma A\beta\gamma = 0, \quad \text{ou } \Sigma \frac{A}{\alpha} = 0, \tag{1}$$

celle de la tangente au point $(\alpha', \beta', \gamma')$ de la courbe est

$$\Sigma(B\gamma' + C\beta')\alpha = 0. \tag{2}$$

De l'égalité de condition

$$\Sigma A\beta'\gamma' = 0, \quad \text{ou} \quad A\beta'\gamma' + (B\gamma' + C\beta')\alpha' = 0,$$

tirons la valeur du binome $B\gamma' + C\beta' = 0$ pour la substituer dans l'équation (2); celle ci prendra la forme (*)

$$\frac{A}{\alpha'^2}\alpha + \frac{B}{\beta'^2}\beta + \frac{C}{\gamma'^2}\gamma = 0. \tag{3}$$

Si on la représente par

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = 0,$$

on a

$$u : v : w = \frac{A}{\alpha'^2} : \frac{B}{\beta'^2} : \frac{C}{\gamma'^2},$$

(*) Les coefficients de l'équation (3) sont les dérivées partielles de $-\Sigma\frac{A}{\alpha'}$ par rapport à α', β', γ'.

Digitized by Google

$$\alpha' : \beta' : \gamma' :: \sqrt{\frac{A}{u}} : \sqrt{\frac{B}{v}} : \sqrt{\frac{C}{w}}. \qquad (4)$$

En remplaçant dans l'équation $\Sigma \frac{A}{\alpha'} = 0$ les coordonnées α', β', γ', par les valeurs proportionnelles (4), on obtient l'équation tangentielle

$$\sqrt{Au} + \sqrt{Bv} + \sqrt{Cw} = 0. \qquad (5)$$

Les radicaux ont les mêmes signes dans l'égalité (5) que dans les formules (4).

En particulier, si l'on considère le cercle circonscrit au triangle de référence et l'ellipse circonscrite qui a son centre au centre de gravité et que l'on emploie des coordonnées barycentriques (m_1, m_2, m_3), les équations (4) et (5) deviennent

$$m_1' : m_2' : m_3' :: \frac{a}{\sqrt{u}} : \frac{b}{\sqrt{v}} : \frac{c}{\sqrt{w}}, \quad \Sigma a\sqrt{u} = 0. \qquad (6)$$

$$m_1' : m_2' : m_3' :: \frac{1}{\sqrt{u}} : \frac{1}{\sqrt{v}} : \frac{1}{\sqrt{w}}, \quad \Sigma\sqrt{u} = 0. \qquad (7)$$

2. L'équation d'un cercle quelconque peut prendre la forme

$$-\Sigma a^2 m_2 m_3 + (um_1 + vm_2 + wm_3)(m_1 + m_2 + m_3) = 0. \qquad (8)$$

L'équation $um_1 + vm_2 + wm_3 = 0$ représente l'axe radical de ce cercle et du cercle circonscrit au triangle de référence ; les coefficients u, v, w sont les puissances des sommets de référence par rapport au cercle (8).

3. Ces préliminaires posés, désignons par A_1, B_1, C_1 les milieux des côtés du triangle ABC, par A_2, B_2, C_2 les pieds des hauteurs, par A_3, B_3, C_3 les points de contact des côtés avec le cercle inscrit I, par A_3', B_3', C_3' les points où le cercle ex-inscrit I' touche BC, CA, AB, etc.

Rapportons la figure au triangle $A_1B_1C_1$; les puissances des points A_1, B_1, C_1 par rapport au cercle inscrit sont

$$u = \overline{A_1A_3}^2 = \tfrac{1}{4}\overline{A_2A_3'}^2 = \tfrac{1}{4}(b-c)^2, \quad v = \tfrac{1}{4}(c-a)^2, \quad w = \tfrac{1}{4}(a-b)^2.$$

Les valeurs de u, v, w vérifient les équations tangentielles $\Sigma a\sqrt{u} = 0$, $\Sigma\sqrt{u} = 0$ du cercle $A_1B_1C_1$ et de *l'ellipse de Steiner* de ABC (touchant BC, CA, AB en A_1, B_1, C_1) ; car on a identiquement

$$a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = 0, \qquad (9)$$

$$(b-c) + (c-a) + (a-b) = 0. \qquad (10)$$

Digitized by Google

Donc l'axe radical des cercles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ touche le premier cercle ; autrement dit. ces deux cercles se touchent. Nous appelons F le point de contact, f la tangente commune en F. La droite f touche également l'ellipse de Steiner de ABC en un point que nous désignons par F_1.

Les relations (6) et (7) donnent, pour les coordonnées barycentriques des points F, F_1,

$$\left(\frac{a}{b-c}, \frac{b}{c-a}, \frac{c}{a-b}\right), \left(\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}\right),$$

et pour leurs coordonnées normales,

$$\left(\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}\right), \left(\frac{1}{a(b-c)}, \frac{1}{b(c-a)}, \frac{1}{c(a-b)}\right).$$

L'équation de la tangente commune f est respectivement

$$\Sigma(b-c)^2 m_1 = 0, \quad \text{ou} \quad \Sigma(b-c)^2 ax = 0$$

suivant qu'on adopte les coordonnées barycentriques ou les coordonnées normales.

4. Dans le quadrilatère inscrit $A_1B_1C_1F$ les perpendiculaires abaissées de F sur A_1B_1 et A_1C_1 sont proportionnelles aux distances FB_1, FC_1; on en conclut aisément que les distances FA_1, FB_1, FC_1 sont inversement proportionnelles aux valeurs absolues des coordonnées normales de F par rapport au triangle $A_1B_1C_1$ ou proportionnelles aux valeurs absolues des différences $b-c$, $c-a$, $a-b$. Supposons $a > b > c$; alors comme $c-a < 0$, on peut conclure que le point F est situé sur l'arc du cercle O_9 qui est sous-tendu par le côté moyen du triangle $A_1B_1C_1$.

Les égalités (8) et (9) admettent maintenant l'interprétation suivante :

$$a.FA_1 + c\,FC_1 = b.FB_1, \quad FA_1 + FC_1 = FB_1 ;$$

la première correspond au théorème de Ptolémée, la seconde indique une proprieté très curieuse qui a été signalée pour la première fois par M. Godt.

5. Les puissances des points A_1. B_1. C_1 par rapport au cercle ex-inscrit I′ ont pour expression

$$u = \tfrac{1}{4}(b-c)^2, \quad v = \tfrac{1}{4}\overline{B'B'''}^2 = \tfrac{1}{4}(c+a)^2, \quad w = \tfrac{1}{4}(a+b)^2,$$

de sorte que l'axe radical des cercles O_9 et I′ est représenté par

$$(b-c)^2 m_1 + (c+a)^2 m_2 + (a+b)^2 m_3 = 0.$$

Digitized by Google

Cet axe touche le cercle d'Euler et l'ellipse de Steiner ; car on a

$$a(b-c)-b(c+a)+c(a+b)=0, \qquad (11)$$

$$(b-c)+(c+a)-(a+b)=0. \qquad (12)$$

Les points de contact F', F'_1 ont pour coordonnées barycentriques

$$\left(\frac{a}{b-c}, -\frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}\right), \left(\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c+a}, -\frac{1}{c(a+b)}\right),$$

et pour coordonnées normales

$$\left(\frac{1}{b-c}, -\frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right), \left(\frac{1}{a(b-c)}, \frac{1}{b(c+a)}, -\frac{1}{c(a+b)}\right).$$

Les équations (11) et (12) indiquent que

$$F'B_1.b = F'A_1\,a + F'A_1.c, \quad F'C_1 = F'A_1 + F'C_1.$$

6. La démonstration se fera de la même manière pour les cercles exinscrits I'', I'''. Soient F'', F''' leurs points de contact avec le cercle O_9 et F''_1, F'''_1 les points de contact des tangentes avec l'ellipse de Steiner. Les coordonnées barycentriques des points F'', F''_1, F''', F'''_1 sont respectivement

$$\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c-a}, -\frac{c}{a+b}; \quad -\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a+b}$$

$$-\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a-b}; \quad \frac{1}{b+c}, -\frac{1}{c+a}, \frac{1}{a-b}$$

et l'on a les relations

$$F''C_1 = F''A_1 + F''B_1, \quad F'''B_1 = F'''A_1 + F'''C_1.$$

7. On peut se demander s'il existe des relations assez simples entre les trois points A_3, B_3, C_3 et le point de contact des cercles $A_1B_1C_1$, O_9, ou entre les points A_2, B_2, C_2 et l'un des points F, F', F'', F'''.

Si A_3, B_3, C_3 sont les points de contact du cercle inscrit au triangle ABC et que l'on prenne le triangle $A_1B_1C_1$ pour triangle de référence, on a pour les puissances de A_3, B_3, C_3 par rapport au cercle O_9 :

$$u = A_3A_1 \cdot A_3A_2 = \tfrac{1}{2}(b-c)AI \sin\tfrac{1}{2}(B-C)$$
$$= \tfrac{1}{2}(b-c)r \sin\tfrac{1}{2}(B-C) : \sin\tfrac{1}{2}A ;$$

d'où l'on conclut

$$u : v : w = \sin^2\tfrac{1}{2}(B-C) : \sin^2\tfrac{1}{2}(C-A) : \sin^2\tfrac{1}{2}(A-B).$$

Les côtés du triangle $A_3B_3C_3$ ont pour valeurs

$$a_3 = 2r\cos\frac{A}{2}, \quad b_3 = 2r\cos\frac{B}{2}, \quad c_3 = 2r\cos\frac{C}{2}.$$

Digitized by Google

On constate de nouveau que l'axe radical des cercles I et O_9 touche le cercle I ; car l'équation $\Sigma a_1\sqrt{u} = 0$ devient

$$\Sigma \cos\frac{A}{2}\sin\tfrac{1}{2}(B-C) = 0. \qquad (13)$$

Les coordonnées barycentriques du point de contact F sont maintenant

$$\frac{\cos\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}, \frac{\cos\frac{1}{2}B}{\sin\frac{1}{2}(C-A)}, \frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}, \text{ ou } \frac{a}{b-c}, \frac{b}{c-a}, \frac{c}{a-b}.$$

F a donc les mêmes coordonnées dans les deux triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$. Cette propriété peut s'expliquer à priori : En effet, F étant le centre de gravité des masses m_1, m_2, m_3 attachées en A_1, B_1, C_1, le déplacement de la masse m_1 de A_1 en A_2 déplace F en un point U tel que FU est parallèle à A_1A_2 et égale à $A_1A_2\frac{m_1}{m_1+m_2+m_3}$; si l'on déplace ensuite m_2 de B_1 en B_2, m_3 de C_1 en C_2, le centre de gravité éprouve deux nouveaux déplacements parallèles aux droites B_1B_2 et C_1C_2 et égaux à $B_1B_2\frac{m_2}{m_1+m_2+m_3}$, $C_1C_2\frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}$; ces trois déplacements étant parallèles et proportionnels avec côtés BC, CA, AB ramènent F en F.

Des coordonnées normales de F dans le triangle $A_2B_2C_2$,

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}, \quad \frac{1}{\sin\frac{1}{2}(C-A)}, \quad \frac{1}{\sin\frac{1}{2}(A-B)},$$

on conclut

$$\frac{FA_2}{\sin\frac{1}{2}(B-C)} = \frac{FB_2}{\sin\frac{1}{2}(C-A)} = \frac{FC_2}{\sin\frac{1}{2}B-C)};$$

il en résulte que la relation (13) exprime le théorème de Ptolémée.

Mais on a aussi l'égalité

$$\Sigma \sin\frac{A}{2}\sin\frac{1}{2}(B-C) = 0, \quad \text{ou} \quad \Sigma \pm \sin\frac{A}{2}\cdot FA_2 = 0,$$

qui exprime une seconde relation nécessaire entre les quatre points A_2, B_2, C_2, F Est elle susceptible d'une interprétation géométrique assez simple ?

8. Prenons pour triangle de référence le triangle orthique $A_2B_2C_2$. Les puissances de A_2, B_2, C_2 par rapport au cercle I sont

$$u = A_2A_3^2 = AI^2\sin^2\frac{1}{2}(B-C) = r^2\frac{\sin^2\frac{1}{2}(B-C)}{\sin^2\frac{1}{2}A}, \ldots;$$

Digitized by Google

par suite, l'axe radical des cercles I et O_2 a pour équation

$$\Sigma \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(B-C)}{\sin^2 \frac{1}{2} A} m_1 = 0.$$

Les côtés du triangle $A_2B_2C_2$ ayant pour valeurs $a_2 = R \sin 2A \ldots$; la condition que l'axe radical touche le cercle O_2 est

$$\Sigma a_2 \sqrt{u} = 0, \text{ ou } \Sigma \frac{\sin 2A \sin \frac{1}{2}(B-C)}{\sin \frac{1}{2} A} = 0;$$

elle peut s'écrire

$$\Sigma \cos \frac{A}{2} \cos A \sin \frac{1}{2}(B-C) = \Sigma \cos A \sin \frac{1}{2}(B+C) \sin \frac{1}{2}(B-C)$$

$$= \Sigma \cos A \left[\sin^2 \frac{1}{2} B - \sin^2 \frac{1}{2} C\right] = \Sigma \cos A \left[\frac{1-\cos B}{2} - \frac{1-\cos C}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma \cos A (\cos B - \cos C) = 0;$$

donc elle est vérifiée.

Les coordonnées barycentriques de F sont maintenant $\frac{a_2}{\sqrt{u}}, \ldots$ ou $\frac{\sin 2A \sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{1}{2}(B-C)} \ldots$; les coordonnées normales sont $\frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{1}{2}(B-C)}, \ldots$ ou $\frac{b-c}{a}$ etc.

SUR LE THÉORÈME DES DEUX MOYENNES;

par M. A. Aubry.

On appelle ainsi le théorème de maximum représenté par l'inégalité

$$(x) \qquad a_1 + a_2 + \cdots + a_n > n \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \qquad (a_1 \cdots a_n \text{ positifs})$$

Euclide l'a démontré géométriquement pour deux quantités, et Eutocius, probablement d'après Archimède, pour trois quantités dont deux sont égales (*).

(*) Nous avons donné (*Progreso matematico*, 1900, p. 43 et seq.,) la démonstration de ce théorème par Eutocius, Al-Quouhi, Borelli et G. de St-Vincent,

Digitized by Google

Ricci (*Geometrica exercitatio*, Rome, 1666) l'a démontré pour le cas de h quantités égales chacune à a et $n - h$ égales chacune à b. Sa démonstration est très remarquable, d'autant plus qu'il l'applique à la construction de la tangente et à la quadrature de la parabole $y^h = x^k$, deux faits géométriques connus à cette époque mais non encore démontrés. Aussi nous croyons utile d'en faire connaître le principe. Soit :

$$a^h b^k > (a + x)^h (b - x)^k ;$$

posons $\frac{a+x}{a+b} = \frac{a}{a+y}$; il viendra, en faisant $h + k = n$:

$$\frac{a^h b^k}{(a+b)^n} > \frac{(a+x)^h (b-x)^k}{(a+b)^n} = \frac{a^h y^k}{(a+y)^n}$$

d'où

$$\left(\frac{b}{y}\right)^k > \left(\frac{a+b}{a+y}\right)^n > \left(\frac{a+2b-y}{a+b}\right)^n \text{ (**)}$$

et de là, en écrivant $b - x = z$,

$$(a+b)^n b^k > (a+b+z)^n (b-z)^k.$$

Ainsi, si dans le cas des exposants h, k, la condition du maximum est que ces nombres soient proportionnels aux quantités a, b, il en sera de même dans le cas des exposants n, k. Or, c'est ce qui a lieu si $h = k = 1$; on conclut que le théorème est général.

Müller (*A Mathematical Treatise*, Londres, 1736) a traité la recherche du maximum de $x^r y^s \cdots (a - x - y - \cdots)^k$, par le calcul différentiel. La démonstration élémentaire bien connue du même théorème se voit, pour la première fois, dans les *Mélanges d'Analyse et de Géométrie*, de J. de Stainville (Paris, 1815.) Elle est basée, comme on sait, sur cette remarque qu'on augmente le produit de facteurs dont la somme est

---

ainsi que l'application probable de Tartaglia à la solution d'une question que lui avait posée Cardan.

Fermat et l'Hospital l'ont également démontré, le premier par sa méthode *de maximis*, et le second, par le calcul différentiel.

(**) La seconde inégalité a lieu à cause de la relation évidente

$$\frac{\alpha}{\alpha - \beta} > \frac{\alpha + \beta}{\alpha}.$$

Digitized by Google

constante si on remplace deux de ceux-ci par leur demi-somme, (*) et l'application de cette remarque au produit

$$\frac{x}{f}\frac{x}{f}\frac{x}{f}\cdots\frac{y}{g}\cdots$$

dont le maximum a lieu en même temps que celui de $x^f y^g \cdots$ Stainville étend ce théorème à des exposants fractionnaires.

Le théorème des deux moyennes a été donné sous la forme (α) par Cauchy (*Analyse algébrique*, Paris, 1821), qui le démontre en le vérifiant pour $n = 2, 4, 8, 16, \cdots$ et faisant voir que, s'il est vrai pour $n = k$, il l'est pour $n = k - 1$.

Labatto (*Corresp math. et phys.* t. IV.) a démontré le théorème de Cauchy en utilisant le développement du logarithme en série ; et Liouville (*Journal de Mathématiques*, 1839), en appliquant le calcul différentiel à l'expression

$$y = (a_1 + x_2 + \cdots + a_{n-1} + x) - n\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_{n-1} x}.$$

On en trouve deux autres dans le JME de 1882 et le JMS de 1884 : la première, de Bourget est fausse ; la seconde, de Laguerre, basée sur la considération du développement de l'expression

$$\frac{1}{x+a_1} + \cdots + \frac{1}{x+a^k} = 0,$$

est trop longue pour être reproduite ici.

Bernès (M. 1890) suppose le théorème vrai pour $n = k - 1$ et pose :

$$\left(a_f^{k-1} - a_g^{k-1}\right)\left(a_f - a_g\right) > 0\text{, d'où } a_f^k + a_g^k > a_f^{k-1} a_g + a_f a_g^{k-1};$$

(*) Cette démonstration laisse à désirer ; rien ne prouve que les facteurs tendent à s'égaler : il faudrait chaque fois moyenner le plus grand facteur avec le plus petit.

Même observation pour le problème suivant, tiré des *Annales de Gergonne.* (t. III) : *Soit la suite décroissante* $A_1, \cdots A_f, \cdots A_n$; *comment multiplier ses termes par ceux de la suite* $B_1, \cdots B_f, \cdots B_n$ *pour que la somme des produits soit un maximum ou un minimum ?* Soit $A_1B_1 + \cdots + A_fB_f + \cdots = S$ la somme cherchée ; on aura :

$$A_1B_1 + \cdots + A_fB_g + \cdots + A_gB_f + \cdots \lessgtr S \quad \text{d'où} \quad (A_f - A_g)(B_g - B_f) \lessgtr 0.$$

Les B devraient donc aller en décroissant pour le maximum, et en croissant pour obtenir un minimum. — La démonstration est insuffisante.

Digitized by Google

ajoutant toutes les relations semblables obtenues en donnant aux nombres f, g les valeurs 1, 2, 3, $\cdots k$, il vient :

$$2(k-1)\Sigma a_1^k > 2\Sigma a_1\left(a_2^{k-1}+\cdots+a_k^{k-1}\right) > 2\Sigma a_1 (k-1)\, a_2 \cdots a_k,$$

et de là $$\Sigma a_1^k > k a_1 \cdots a_k.$$

Dans le *Progreso matematico* (1900, p. 402), nous en avons donné deux, utilisant la relation archimédienne

$$(\beta) \qquad (1+x)^k > 1+kx.$$

Dans la première, on fait

$$x = \frac{k a_k - \Sigma a_1}{k(\Sigma a_1 - a_k)} \text{ et on multiplie par } \left(\frac{\Sigma a_1 - a_k}{k-1}\right)^k,$$

ce qui donne

$$\left(\frac{\Sigma a_1}{k}\right)^k > \left(\frac{\Sigma a_1 - a_k}{k-1}\right)^{k-1} a_k.$$

Voici la seconde démonstration. Soit m le produit des dénominateurs des nombres $a, b, c, \cdots d$, dont la somme est nulle; on aura

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{ma+\cdots+ml} = 1,$$

d'où, à cause de (β)

$$(\gamma) \qquad 1 > (1+a)(1+b)\cdots(1+l), \quad (a+b+\cdots+l=0).$$

Changeons $$a, b, \cdots l \text{ en } \frac{a_1}{Q}, \frac{a_2}{Q}, \cdots \frac{a_n}{Q},$$

il vient

$$Q^n > (Q+a_1)(Q+a_2)\cdots(Q+a_n), \quad (a_1+\cdots+a_n=0).$$

On peut encore tirer trois démonstrations très simples des considérations suivantes (l. cit.) :

1° Si la somme des k nombres $a, \alpha, b, \cdots c$ est nulle, on aura, par exemple, $a>0$, $\alpha<0$, d'où

$$(\delta) \qquad 1+a+\alpha > (1+a)(1+\alpha).$$

Supposons que la relation (γ) ait lieu pour $k-1$ nombres, on pourra écrire

$$1 > (1+a+\alpha)(1+b)\cdots(1+c)$$

Digitized by Google

d'où, en multipliant par (δ), ce qui est permis si $1+\alpha>0$,

$$1>(1+a)(1+\alpha)(1+b)\cdots(1+c).$$

Or, on a : $1>(1+a)(1-a)$; la relation (γ) est donc générale.

2° Considérons les k nombres $a, \alpha, b, \cdots c$ et supposons qu'on ait

$$a\alpha b\cdots c=1, \quad a\alpha+b+\cdots+c>k-1;$$

en prenant, par exemple, $a>1$ et $\alpha<1$, on pourra écrire :

$$(1-a)(1-\alpha)<0, \quad \text{d'où} \quad a+\alpha>a\alpha+1,$$

et, par suite,

$$a+\alpha+b+\cdots+c>k.$$

Ainsi, si pour n nombres positifs $a, b, \cdots l$ on a : $ab\cdots l=1$, on a aussi $a+b+\cdots+l>n$. Changeant $a, b, \cdots l$ comme tout à l'heure, il vient :

$$a_1a_2\cdots a_n=Q^n, \quad a_1+a_2+\cdots+a_n>Q.$$

3° Supposons le théorème de Cauchy vérifié pour $k-1$ nombres et posons

$$a_1>a_2>\cdots>a_k>0, \quad a_1+a_2+\cdots+a_k=\Sigma, \quad a_1a_2\cdots a_k=\Pi,$$

$$\frac{\Sigma-a_k}{k-1}=b_k, \quad \frac{\Sigma-b_k}{k-1}=c_k, \cdots$$

nous aurons, par hypothèse

$$\sqrt[k-1]{\frac{\Pi}{a^k}}<b_k,$$

d'où $\quad 1<b_1b_2\cdots b_k, \quad b_1+b_2+\cdots+b_k=\Sigma.$

On a de même

$$b_1b_2\cdots b_k<c_1c_2\cdots c_k, \quad c_1+c_2+\cdots+c_k=\Sigma,$$

et ainsi de suite. Or, dans les produits

$$a_1\cdots a_k, \quad b_1\cdots b_k, \quad c_1\cdots c_k, \cdots$$

le plus grand facteur diffère du plus petit, respectivement, des quantités

$$a_1-a_k, \quad b_k-b_1=\frac{a_1-a_k}{k-1}, \quad c_1-c_k=\frac{a_1-a_k}{(k-1)^2}, \cdots$$

Les termes de ces mêmes produits se rapprochent donc indéfiniment de $\frac{\Sigma}{k}$.

Digitized by Google

SUR L'AIRE D'UNE CERTAINE QUARTIQUE.

par M. E. N. Barisien.

La quartique considérée a pour équation

$$\frac{y^2}{b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\left(k-\frac{x^2}{a^2}\right)^2=0.$$

L'aire de cette quartique offre cette particularité, assez peu commune dans les courbes à branches infinies, d'avoir l'aire comprise entre la courbe et ses asymptotes finie. Cette courbe offre trois formes différentes, suivant que $k>1$, $k=1$, $k<1$.

1° $k>1$. La courbe a pour asymptotes les deux droites $x=\pm a$, et a deux points isolés ($x=\pm a\sqrt{k}$, $y=0$). Elle a aussi les deux sommets ($x=0$, $y=\pm kb$).

On peut poser $x=a\cos\varphi$; alors

$$y=\frac{b(k-\cos^2\varphi)}{\sin\varphi}.$$

On a ainsi les coordonnées paramétriques de la courbe.

La différentielle de l'aire U est

$$dU=y\frac{dx}{d\gamma}d\varphi=-\frac{b(k-\cos^2\varphi)}{\sin\varphi}\times a\sin\varphi dy$$

$$dU=ab(\cos^2\varphi-k)d\varphi.$$

d'où

$$U=ab\left[\frac{\varphi}{2}+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2}-k\varphi\right]+\text{constante}.$$

En intégrant de $\varphi=\frac{\pi}{2}$ à $\varphi=0$, on obtient le quart de l'aire totale comprise entre la courbe et ses asymptotes. On aura donc pour l'aire totale

$$A=4ab\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\pi ab\left(2k-1\right). \tag{2}$$

2° $k=1$. La formule de l'aire donne alors $A=\pi ab$.

Dans ce cas l'équation de la courbe devient

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0;$$

on a donc une ellipse d'axes $2a$ et $2b$, et les deux droites $x=\pm a$.

Digitized by Google

3° $k < 1$. Dans ce cas, la courbe a deux points doubles réels, ce qui constitue une boucle. L'aire (2) susbsiste toujours; mais, d'après les signes des aires, l'aire A est la différence entre l'aire de la boucle et l'aire comprise entre le reste de la courbe et ses asymptotes.

Ainsi, si $k = \frac{1}{4}$, $A = \frac{\pi ab}{2}$.

Lorsque $k = \frac{1}{2}$, on a $A = 0$, ce qui veut dire qu'alors l'aire de la boucle est équivalente à l'aire comprise entre le reste de la courbe et ses asymptotes.

Evaluons, lorsque $k < 1$, ces deux aires.

Aire de la boucle. On aura cette aire A_1 en intégrant (1), quatre fois de $\varphi = \frac{\pi}{2}$ à $\varphi = \arccos \sqrt{k}$; on trouve

$$(3)\quad A_1 = \pi ab\,(1 - 2k) + 2ab\,[\arccos \sqrt{k} \times (1 - 2k) - \sqrt{k\,(1 - k)}]$$

Aire entre le reste de la courbe et les asymptotes. On aura cette aire A_2 en intégrant (1) quatre fois de $\varphi = \arccos \sqrt{k}$ à $\varphi = 0$:

$$(4)\quad A_2 = 2\,ab\,[\arccos \sqrt{k} \times (1 - 2k) - \sqrt{k\,(1 - k)}]$$

Et l'aire totale sera bien

$$A = A_1 - A_2.$$

Si $k = \frac{1}{2}$, on a, en valeur absolue

$$A_1 = A_2 = ab.$$

BIBLIOGRAPHIE.

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik herausgegeben von Moritz Cantor, unter Mitwirkung der Herren V. Bobynin, A. V. Braunmühl, F. Cajori, S. Günther, V. Kommerell, G. Loria, E. Netto, G. Vivanti, C.-R. Wallner. Vierter Band. Von 1759 bis 1799. Leipzig, Teubner, 1908 (In-8° de VI-1113 pp.) Prix : 30 marcs.

Ce volume, d'un caractère tout différent des trois premiers, contient les sections 19-28 de la grande histoire des mathématiques de M. Maurice Cantor.

Digitized by Google

Le tome III se terminait à l'année 1758, et avec lui l'illustre professeur d'Heidelberg avait déposé la plume. Mais depuis longtemps, et de toute part, on lui demandait de la reprendre et de poursuivre son œuvre en la menant au moins jusqu'à la fin du XVIII^e^ siècle. A ces pressantes instances M. CANTOR répondait par un argument irréfutable : son grand âge ne lui permettait plus d'entreprendre les recherches, vraiment par trop considérables, exigées par une pareille entreprise.

Un groupe de savants s'offrit alors au maître. Ils se partageraient la besogne et travailleraient sous sa direction. La proposition fut acceptée et nous vaut ce quatrième volume des *Vorlesungen*. Les mathématiques de la deuxième moitié du XVIII^e^ siècle y sont classées en neuf branches, confiées à neuf historiens différents. En acceptant la direction générale de l'entreprise M. CANTOR devait tâcher d'y donner le plus d'unité possible. Cette unité fait cependant quelque peu défaut ; c'était inévitable. Nous avons, en réalité, moins affaire à une histoire des mathématiques de la fin de XVIII^e^ siècle, qu'à neuf monographies distinctes, comprenant, il est vrai, toutes les branches de la science. Les auteurs diffèrent entre eux, non seulement par la manière de comprendre le sujet, mais ils nous ont même, parfois, paru un peu inégaux par la sûreté de l'information. N'importe, le travail forme néanmoins un ensemble de la plus haute valeur ; nous ne saurions trop le recommander.

Dans le plan primitif, le volume devait se terminer par une vingt-huitième section, où M. CANTOR montrerait, dans un tableau d'ensemble, les progrès des mathématiques pendant la seconde moitié du XVIII^e^ siècle ; sans s'arrêter au détail, il y mettrait en relief « le développement des idées ». Le vénérable savant a reculé devant une tâche aussi difficile. Restreignant le sujet, il s'est contenté de nous donner un *Index chronologique* des faits importants. Même ainsi limité, son travail est des plus utiles ; la lecture en est facile et tout mathématicien devrait en prendre connaissance. Des indications multiples renvoient aux sections précédentes le lecteur désireux d'approfondir une question particulière.

Voici maintenant comment les collaborateurs de M. CANTOR se sont partagé les matières :

19^e^ *Section*. Travaux concernant directement l'histoire des mathématiques. Monographies de branches particulières. Dictionnaires. Éditions nouvelles, revisions et reconstitutions d'anciens ouvrages d'auteurs classiques ; par S. GÜNTHER.

20^e^ *Section*. Arithmétique. Théorie des équations. Théorie des nombres ; par FL. CAJORI.

Elle est subdivisée en trois parties ; une pour chacune de ces matières.

21^e^ *Section*. Combinaisons. Calcul des probabilités. Séries Imaginaires ; par E. NETTO.

Elle est subdivisée en quatre parties ; une par matière.

22^e^ *Section*. Géométrie élémentaire, par V. BOBYNIN.

1 Manuels de Géométrie élémentaire. 2. Géométrie appliquée (Arpentage). 3. Travaux sur des théories particulières de la géométrie élémentaire. 4. Parallèles.

Digitized by Google

23e *Section.* Trigonométrie, Polygonométrie, Tables numériques, par A. von Braunmühl (1).

1. Perfectionnements apportés à la trigonométrie par Euler ainsi que par ses contemporains et ses successeurs. 2. Les méthodes d'enseignement de la trigonométrie ; essais divers pour en simplifier le plus possible les fondements. 3. Tétragonométrie ; polygonométrie ; polyédrométrie. 4. Tables trigonométriques et autres ; cyclométrie ; séries trigonométriques.

24e *Section.* Géométrie analytique du plan et de l'espace, par V. Kommerell.

1. Sections coniques. 2. Courbes planes de degrés supérieurs. 3. Courbes et surfaces de l'espace.

25e *Section.* Perspective et géométrie descriptive, par G. Loria.

1. La perspective depuis le moyen âge jusqu'au XVIIe siècle. 2. L'âge d'or de la géométrie descriptive. 3. Les précurseurs de Monge. 4. Monge fondateur de la géométrie descriptive.

26e *Section.* Calcul infinitésimal, par G. Vivanti.

I. Fondements du calcul infinitésimal. II. Traités de calcul infinitésimal. III. Différentiation et intégration. 1. Différentiation. 2. Intégration. A. Principes de l'intégration et questions diverses. B. Intégration des fonctions rationnelles. C. Intégration des fonctions irrationnelles. D. Intégration des fonctions transcendantes. E. Intégration par séries : intégration par approximation. F. Différentiation et intégration sous le signe de l'intégrale. G. Intégrales multiples. IV. Intégrales définies. V. Applications analytiques du calcul infinitésimal. 1. Maxima et minima. 2. Formes indéterminées. 3. Application du calcul infinitésimal à la théorie des séries. VI. Transcendantes. Intégrales elliptiques. 1. Diverses espèces de transcendantes. 2. Intégrales elliptiques. 1° Relations entre les arcs d'une même conique 2° Relations entre les arcs de coniques différentes. 3° Questions diverses.

27e *Section.* Équations différentielles. Calcul des sommes et des différences. Calcul des variations ; par C. R. Wallner.

Elle est divisée en trois parties, une par matière.

28e *Section.* Coup d'œil d'ensemble sur l'état des mathématiques de 1758 à 1799, par M. Cantor. H.B.

Vorlesungen über darstellende Geometrie, von Dr Gino Loria, ord. Prof. der höheren Geometrie an der Universität Genua. Deutsche Ausgabe, von Fr. Schütte. Erster Teil : die Darstellungsmethoden. Leipzig und Berlin, Teubner, 1907 (In-8e cartonné de XI-129 pp., avec 163 figures dans le texte). Prix : 6,80 marcs.

---

(1) A. von Braunmühl est décédé le 7 mars 1908. Il est surtout connu par ses *Vorlesungen ueber Geschichte der Trigonometrie* (2 vol. in-8e, Leipzig, Teubner, 1900 et 1903). Ouvrage d'une exactitude merveilleuse, qui immortalisera son nom. M. Sigismond Günther a consacré une courte, mais intéressante notice à von Braunmühl, dans les *Mitteilungen zur Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften*, t. VII, Hambourg, Voss, 1908, pp. 362-367.

Digitized by Google

Sommaire. Livre I. La méthode de Monge. II. Projections centrales. III. Plans cotés. IV. Axonométrie. V. Photogrammétrie.

Cet ouvrage se distingue des traités de Géométrie descriptive généralement employés en Belgique, d'abord en ce qu'il fait un usage assez fréquent des constructions de la géométrie projective. Cependant, l'auteur, comme il le fait remarquer dans sa préface, n'a pas voulu suivre l'exemple de ceux qui fusionnent les deux géométries à la manière de Fiedler. Ensuite, les matières des livres II et IV sont souvent placées chez nous dans les traités de stéréotomie ; enfin celles du livre V n'y sont pas du tout mentionnées jusqu'à présent.

L'excellent volume de l'éminent professeur de Gênes est d'ailleurs très clair et très méthodique, l'impression en est très soignée, et, par suite, il est très agréable à lire ou à consulter.

Il ne sera pas inutile d'appeler l'attention des lecteurs belges sur quelques points particuliers : problèmes qu'on ne rencontre pas habituellement dans nos traités, ou qui y sont résolus par une voie différente, théorèmes ou remarques spéciales.

I. Dans le premier livre, l'auteur résout par projectivité différentes questions sur les droites de profil, fait remarquer l'affinité dont jouissent les deux projections d'une figure plane, et réunit, grâce à la considération des éléments à l'infini, des problèmes distincts en apparence. Signalons encore le problème du point commun à trois plans, résolu par une projection oblique spéciale, appelée projection militaire, et celui des deux droites rencontrant quatre droites données quelconques, résolu par projectivité. Les bissectrices des angles de deux droites sont regardées comme des éléments conjugués communs à deux involutions de rayons (une erreur s'est glissée, fig. 49, dans la recherche du pôle de l'une des involutions sur le cercle) ; on procède de même pour les plans bissecteurs des angles de deux plans.

II. L'auteur traite dans ce livre les projections centrales en examinant soigneusement tous les cas particuliers qui se présentent dans les problèmes qu'il envisage. Signalons les propositions relatives aux droites et aux plans qui se coupent dans le plan parallèle antérieur, la solution originale (la 2e) de la représentation du plan déterminé par trois points donnés, et le passage des projections centrales à celles de Monge ou vice-versa.

III. On ne lira pas sans intérêt les numéros 92 et 94, où l'auteur expose une généralisation des projections centrales, et les numéros 103 et 104 où il passe des projections cotées aux projections centrales.

IV. Notons spécialement les relations, clairement établies, entre les éléments fondamentaux de l'axonométrie orthogonale, les théorèmes de Schlömilch et de Schwarz, enfin le théorème de Pohlke dans l'axonométrie oblique.

V. L'auteur y examine deux problèmes dont nous citons le second à cause de l'intérêt qu'il présente. On a n projections d'une figure, faites de centres inconnus ; quelles conclusions peut-on en tirer au sujet de la forme, de la grandeur et des propriétés de la figure de l'espace ? Peut-on la reconstruire ?

Ajoutons que les notations sont en général meilleures que celles auxquelles nous sommes habitués, et que cet excellent traité renferme un grand nombre d'exercices, éminemment propres à développer l'esprit de recherche chez le lecteur. (A. C.)

Digitized by Google

NOTES MATHÉMATIQUES.

22. *Sur la question* **1611.** En lisant les élégantes solutions de cette question publiées (1907, p. 195), j'ai eu la pensée d'examiner le système analogue

$$y + z = a, \quad z^2 + x^2 + xz = b^2, \quad x^2 + y^2 - xy = c^2.$$

Les résultats sont fort intéressants et valent la peine d'être signalés.

En éliminant z entre les deux premières équations, on a

$$x^2 + y^2 - xy + a(x - 2y) + a^2 - b^2 = 0,$$

et en tenant compte de la troisième équation

$$a(x - 2y) = b^2 - a^2 - c^2, \quad \text{ou} \quad y = \tfrac{1}{2}(x + d),$$

après avoir posé $\qquad a^2 + c^2 - b^2 = ad.$

La valeur de y portée dans la troisième équation donne

$$(x + d)^2 + 4x^2 - 2x(x + d) = 4c^2,$$

ou
$$3x^2 = 4c^2 - d^2 = 4c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{a^2},$$

d'où

$$x = \pm \frac{1}{a\sqrt{3}} \sqrt{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}. \qquad (1)$$

Les deux valeurs de y et z correspondantes sont

$$y = \frac{x+d}{2} = \frac{ax + a^2 + c^2 - b^2}{2a} \qquad (2)$$

$$z = a - y = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - ax}{2a}. \qquad (3)$$

La solution est donc beaucoup plus simple que pour la question 1611 qui avait quatre solutions.

Il semblerait cependant qu'il devrait y avoir quatre solutions, en considérant comme M. J. Rose, dans sa remarque, p. 196 (*loc. cit.*) que la question revient à chercher l'intersection d'un plan avec la courbe commune à deux cylindres hyperboliques. Mais voici une autre interprétation géométrique qui montre bien qu'il n'y a que deux solutions.

Digitized by Google

Tout d'abord, remarquons que d'après (1), les valeurs de x, y, z ne seront réelles que si l'on peut former un triangle avec a, b, c. Dans ces conditions, la question est la même que la suivante :

Déterminer sur le côté BC *d'un triangle* ABC *un point* D *tel que l'angle* ADB *soit de* 60°.

Alors DA $= x$, DB $= y$, DC $= z$. On résout plus vite la question de la manière suivante, qu'en se servant des équations données.

Le triangle ABC donne $2S = ah$; or $h = \frac{1}{2} x\sqrt{3}$, donc $x = \frac{4S}{a\sqrt{3}}$.

On retrouve bien ainsi la formule (1).

Le triangle ABD donne successivement

$$\frac{y}{\sin(B + 60^\circ)} = \frac{c}{\sin 60^\circ}.$$

$$y = c(\sin B \operatorname{cotg} 60^\circ + \cos B) = \frac{c \sin B}{\sqrt{3}} + c \cos B.$$

$$y = \frac{2S}{a\sqrt{3}} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a};$$

$$z = a - y = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} - \frac{2S}{a\sqrt{3}}.$$

On retombe ainsi sur les équations (2) et (3).

Si l'on considère sur BC le point D′ tel que AD′C $= 60^\circ$, on aura AD′ $=$ AD, BD′ $+$ BD $= 2c \cos B$.

Les valeurs $y' =$ BD′, $z' =$ CD′ seront alors

$$y' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} - \frac{2S}{a\sqrt{3}}, \quad z' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} + \frac{2S}{a\sqrt{3}}.$$

23. *Sur un cas particulier du théorème de Pascal.* Un abonné nous transmet la question suivante : *Étant données dans un plan cinq droites a, b, c, d, e on considère les trois quadrilatères simples a b d e, a c d e, b c d e, dans lesquels on prend comme côtés opposés les droites d et e. Démontrer que les trois points d'intersection des diagonales de ces quadrilatères sont en ligne droite.*

La démonstration analytique est facile si l'on prend d et e pour axes coordonnés. La proposition, déjà connue de Pappus, est le cas particulier de l'hexagone de Pascal où les sommets se trouvent sur

Digitized by Google

deux droites d et e; deux côtés opposés de l'hexagone sont les diagonales de l'un des quadrilatères $abde$, $acde$, $bcde$.

Notre correspondant la démontre en faisant passer la droite e à l'infini au moyen d'une projection centrale..

24. *Intersection de deux coniques ayant un foyer commun* F.

1° M étant un point commun aux deux coniques, la circonférence décrite de M comme centre et passant par F touche les cercles directeurs qui ont pour centres les seconds foyers. Le problème est donc ramené à trouver le centre d'un cercle passant par F et touchant deux cercles donnés.

Le cercle décrit sur MF comme diamètre touche les deux cercles qui ont pour diamètre les axes focaux des deux coniques; d'où une seconde solution. (MALAISE)

2° Si les deux coniques sont données par le foyer commun F, les directrices correspondantes d, d' et les excentricités numériques e, e' on a

$$MF : (M, d) = e, \quad MF : (M, d') = e',$$

(M, d) et (M, d') désignant les distances de M aux deux directrices. Par conséquent,

$$(M, d) : (M. d') = e' : e.$$

Cette proportion donne le moyen de construire deux sécantes communes. Le problème est ramené à l'intersection d'une conique avec une droite.

Ces solutions sont probablement connues (J. N.)

25. *Points de rebroussement de la développée d'une ellipse.* Soient : O le centre de l'ellipse ; A, un sommet du grand axe ; B, un sommet du petit axe. La perpendiculaire élevée à AB en son milieu rencontre les axes en A′ et B′. Les symétriques de O par rapport à A′ et B′ sont deux points de rebroussement de la développée.

(E. N. BARISIEN)

Quelques auteurs donnent la construction suivante qui est encore plus simple. La perpendiculaire abaissée du sommet D du rectangle BOAD sur la diagonale AB rencontre les axes OA, OB en deux points de rebroussement de la développée.

Digitized by Google

26. *Question d'arithmologie. L'Intermédiaire des Mathématiciens* a publié dernièrement la question suivante :

« Je trouve

$$2=\frac{1^2+3^2}{1^2+2^2},\quad 2^3=\frac{18^2+26^2}{2^2+11^2}. \tag{1}$$

« Peut-on exprimer, en général, 2^n par le rapport de deux sommes « de deux carrés ? » (BARISIEN)

On a l'identité

$$2^{2p+1}=\frac{(2^pa+2^pb)^2+(2^pa-2^pb)^2}{a^2+b^2},$$

qui comprend les égalités (1) et me paraît donner *toutes* les solutions de la question posée par M. Barisien. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1087.

Voir *Mathesis*, (2), VI, p. 216.

On considère deux coniques K, K′ *dont les axes sont dirigés suivant les mêmes droites* Ox, Oy. *D'un point quelconque* M *de* K *on mène les tangentes* MN, MP *à* K′. *Lieu du centre du cercle des neuf points du triangle* MNP. *Démontrer que pour certaines relations entre les axes de* K *et* K′, *ce lieu coïncide avec l'axe* Ox. (E. N. BARISIEN)

Soient les équations des coniques K et K′, à centre.

$$B^2x^2+A^2y^2=A^2B^2,\quad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

Si (α, β) sont les coordonnées de M, on a

$$B^2\alpha^2+A^2\beta^2=A^2B^2. \tag{1}$$

On trouve par un calcul facile qu'il est inutile de reproduire, les coordonnées de l'orthocentre H et du centre de gravité G du triangle MNP et du centre C du cercle circonscrit

$$x_H=\frac{\alpha[c^2\beta^2+b^2(a^2+b^2)]}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2},\qquad y_H=\frac{\beta[-c^2\alpha^2+a^2(a^2+b^2)]}{b^2\alpha^2+a^2\beta^2};$$

$$x_G=\frac{\alpha(b^2\alpha^2+a^2\beta^2+2a^2b^2)}{3(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)},\qquad y_G=\frac{\beta(b^2\alpha^2+a^2\beta^2+2a^2b^2)}{3(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)}.$$

$$x_C=\frac{b^2\alpha(\alpha^2+\beta^2+c^2)}{2(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)},\qquad y_C=\frac{a^2\beta(\alpha^2+\beta^2-c^2)}{2(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)}.$$

Digitized by Google

Or, le centre ω du cercle des neuf points est le milieu de HC. Ses coordonnées sont donc $\frac{1}{2}(x_C + x_H)$, $\frac{1}{2}(y_C + y_H)$, d'où

$$x_\omega = \frac{\alpha[b^2\alpha^2 + (2a^2 - b^2)\beta^2 + b^2(3a^2 + b^2)]}{4(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)},$$

$$y_\omega = \frac{\beta[a^2\beta^2 + (2b^2 - a^2)\alpha^2 + a^2(3b^2 + a^2)]}{4(b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)}. \qquad (2)$$

D'après (1), on peut poser

$$\alpha = A\cos\varphi, \quad \beta = B\sin\varphi,$$

de sorte que les équations paramétriques du lieu de ω sont

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{A\cos\varphi[b^2A^2\cos^2\varphi + (2a^2 - b^2)B^2\sin^2\varphi + b^2(3a^2 + b^2)]}{4(b^2A^2\cos^2\varphi + a^2B^2\sin^2\varphi)}, \\ y &= \frac{B\sin\varphi[a^2B^2\sin^2\varphi + (2b^2 - a^2)A^2\cos^2\varphi + a^2(3b^2 + a^2)]}{4(b^2A^2\cos^2\varphi + a^2B^2\sin^2\varphi)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

La courbe est donc une unicursale du 6e degré dont l'équation cartésienne serait compliquée et dénuée d'intérêt.

On peut encore écrire

$$y = \frac{B\sin\varphi\{[a^2B^2 - (2b^2 - a^2)A^2]\sin^2\varphi + (2b^2 - a^2)A^2 + a^2(3b^2 + a^2)\}}{4(b^2A^2\cos^2\varphi + a^2B^2\sin^2\varphi)}.$$

y sera toujours nul, quel que soit φ, si on a, à la fois,

$$a^2B^2 - (2b^2 - a^2)A^2 = 0, \quad (2b^2 - a^2)A^2 + a^2(3b^2 + a^2) = 0.$$

D'où $$A^2 = \frac{a^2(3b^2 + a^2)}{a^2 - 2b^2}, \qquad B^2 = -(3b^2 + a^2).$$

Telles sont les relations entre a, b, A et B, pour que le lieu de ω soit l'axe Ox. Dans ce cas, l'équation de la conique K devient

$$(a^2 - 2b^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(3b^2 + a^2). \qquad (3)$$

Si $a > b\sqrt{2}$, cette conique est une hyperbole; si $a < b\sqrt{2}$, elle est une ellipse imaginaire.

On peut remarquer aussi que le lieu des points M tels que le centre du cercle des neuf points ω soit sur l'axe Ox se compose de la droite $\beta = 0$, et de la conique

$$(2b^2 - a^2)\alpha^2 + a^2\beta^2 + a^2(3b^2 + a^2) = 0, \qquad (4)$$

qui sera une hyperbole pour $a > b\sqrt{2}$, et une ellipse imaginaire pour $a < b\sqrt{2}$. L'équation (4) est d'ailleurs la même que (3).

Digitized by Google

Remarques. 1° Lorsque les deux coniques K, K′ (ellipses) sont semblables, ou $A = \lambda a$, $B = \lambda b$, les équations (2) se simplifient notablement.

On trouve alors que l'aire de cette courbe est une fonction linéaire de l'aire E de l'ellipse (1) et de l'aire D de sa développée

$$U = E.\frac{(\lambda^2+4)^2}{16ab\lambda^2} + D\,\frac{(24+4\lambda^2-\lambda^4)}{48ab\lambda^2}.$$

2° Si $\lambda = 1$, le point ω devient *le point-limite* du cercle des neuf points d'un triangle formé par deux points de l'ellipse infiniment voisins et les tangentes en ces points. Ses coordonnées sont

$$\frac{\cos\varphi}{4a}(-c^2\cos^2\varphi + 5a^2),\qquad \frac{\sin\varphi}{4b}(c^2\sin^2\varphi + 5b^2),$$

et l'aire de la courbe décrite par ce point-limite est

$$U = \frac{25E+9D}{16}.$$

Ce point-limite est analogue au centre de courbure qui est la limite du centre du cercle circonscrit au triangle formé par trois points de l'ellipse infiniment voisins.

Question 1661.

(Voir *Mathesis*, (3), VIII, p. 79.)

On considère les cercles qui sont tangents à une parabole fixe et qui passent par son foyer. Montrer que la seconde sécante d'intersection du cercle et de la parabole passe par un point fixe. Trouver le lieu du point de rencontre de cette sécante avec la tangente au point de contact du cercle et de la parabole. (E. N. Barisien)

Solution par M. F. de Lepiney (Buenos-Aires). Plus généralement, nous allons démontrer que : *Etant données deux coniques tangentes entre elles* S *et* S′, *la première inscrite, la seconde circonscrite à un triangle* FIJ, *la sécante commune à* S *et* S′ *passe constamment par le point de Gergonne de* S *par rapport au triangle considéré.*

Soit AB la sécante en question. Nous déterminerons d'abord le nombre des coniques tangentes à S et passant par A, F, I, J. A cet effet, opérons une transformation quadratique en prenant A, F et I pour

Digitized by Google

points fondamentaux. S se transformera en une cubique à point double et par conséquent de la 4me classe, tandis que le faisceau de coniques (AFIJ) se transformera en un faisceau de droites. Le nombre des coniques satisfaisant aux conditions ci-dessus est donc 4 : cela a lieu quelle que soit la position de S par rapport au triangle FIJ. Lorsque S est inscrite dans FIJ, 3 des coniques précédentes se réduisent à des couples de droites (FI, AJ), (FJ, AI), (IJ, AF). Il ne reste donc qu'une conique S′ proprement dite, tangente à S et circonscrite à FIJ.

B étant la seconde intersection de S avec S′, il existera donc entre A et B, une correspondance (1, 1). Comme celle-ci est évidemment involutive, la sécante AB passe par un point fixe G.

Soient : I′, J′, F′ les points de contact de S avec les côtés du triangle FIJ. Quand A coïncide avec F′ la quatrième conique de faisceau précédemment considéré dégénère en un couple de droites IJ, FF′, ce qui prouve que FF′ passe par G. De même pour II′ et JJ′.

Supposons maintenant que I et J coïncident avec les points cycliques du plan, nous aurons la première partie de la question proposée.

Transformons-la par rayons vecteurs réciproques en prenant le foyer F de la parabole pour pôle. Nous obtiendrons la proposition suivante : *Soient* A *et* B *les points où une tangente quelconque à une cardioïde fixe recoupe cette courbe. Le cercle* FAB *recoupe l'axe de la cardioïde en un point fixe.*

Soit t la tangente au point de contact de S et S′. Entre t et le rayon correspondant du faisceau G, il existe une correspondance (1, 1). Leur intersection décrit donc une cubique. Celle-ci passe par les points I′, J′, F′, et a un point double en G.

Question 1663.

(Voir *Mathesis*, 3, VIII, p. 79).

Trouver l'enveloppe d'une hyperbole équilatère passant toujours par le centre d'une ellipse E, *ayant les asymptotes parallèles aux axes de* E *et dont le centre décrit* E ? (H. Wieleitner).

Solution par M. M. J. Degueldre et E. N. Barisien. L'ellipse E étant rapportée à ses axes, l'hyperbole équilatère considérée ayant pour centre le point ($a \cos \varphi$, $b \sin \varphi$) de E a pour équation

$$ay \cos \varphi + bx \sin \varphi = xy.$$

Digitized by Google

Dérivant par rapport à φ, on obtient

$$-ay\sin\varphi + bx\cos\varphi = 0.$$

Si l'on ajoute ces équations après les avoir élevées au carré, on trouve pour l'équation de l'enveloppe

$$a^2y^2 + b^2x^2 = x^2y^2.$$

Elle représente une *Kreuzcurve*.

Solution par M. Abramescu (Galatz) *et* Boutin (Paris). Une hyperbole équilatère de centre (α, β) qui passe par l'origine et dont les asymptotes sont parallèles aux axes coordonnés a pour équation

$$xy - \alpha y - \beta x = 0, \tag{1}$$

On a la condition

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

D'après la théorie des enveloppes, on écrira

$$y\,d\alpha + x\,d\beta = 0,$$

$$\frac{\alpha}{a^2}\,d\alpha + \frac{\beta}{b^2}\,\alpha\beta = 0;$$

l'élimination des différentielles $d\alpha$, $d\beta$ donne

$$\frac{y}{\left(\frac{\alpha}{a^2}\right)} = \frac{x}{\left(\frac{\beta}{b^2}\right)} = \frac{\alpha y + \beta x}{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}} = \frac{xy}{1},$$

ou, plus simplement,

$$x = \frac{a^2}{\alpha}, \qquad y = \frac{b^2}{\beta}. \tag{3}$$

Tirons de là α et β pour substituer les valeurs dans l'équation (1); il vient pour l'enveloppe cherchée :

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1.$$

Les équations (3) montrent immédiatement que le point de contact de l'hyperbole avec l'enveloppe est le quatrième sommet du rectangle qui a pour côtés les axes de l'ellipse et pour diagonale la tangente menée à l'ellipse par le centre de l'hyperbole

M. Retali élimine β entre les équations (1) et (2) et égale à zéro le discriminant de l'équation résultante ordonnée par rapport à α.

Les solutions de M. M. Boland, Dalle, Prange et Verheugen ne diffèrent de la précédente que par le mode d'élimination des inconnues auxilaires.

Digitized by Google

M. de Lepiney (Buenos-Aires) considère le problème proposé comme un cas particulier du suivant : *Trouver l'enveloppe d'une conique* H *circonscrite à un triangle* OXY *autopolaire par rapport à une conique fixe* E, *la courbe* H *devant varier de telle façon que les tangentes en* X *et* Y *se coupent en un point variable* P *de* E. Il transforme la figure par inversion triangulaire en prenant XOY pour triangle fondamental. La courbe H se transforme en une droite Δ qui coupe les côtés du triangle fondamental aux pieds des isogonales des tangentes menées à H en O, X, Y. Donc, si Q est l'inverse de P, Δ passera par les pieds des transversales angulaires QX, QY. Partant de là, l'auteur achève la solution par le calcul.

Il nous semble que l'inversion triangulaire ne simplifie pas la solution.

(J. N.)

Remarques. L'intérêt de cette question, très simple en elle-même, est dans la recherche du lieu des sommets et du lieu des foyers de l'hyperbole de l'énoncé.

1° On trouve pour les coordonnées des sommets de l'axe transverse

$$x = a\cos\varphi \pm \sqrt{ab\sin\varphi\cos\varphi},$$

$$y = b\sin\varphi \pm \sqrt{ab\sin\varphi\cos\varphi},$$

et pour le lieu de ces sommets, la quartique

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{y^4}{b^2} = (x+y)^2.$$

2° Les coordonnées des sommets de l'axe imaginaire sont

$$x = a\cos\varphi \pm \sqrt{-ab\sin\varphi\cos\varphi},$$

$$y = b\sin\varphi \mp \sqrt{-ab\sin\varphi\cos\varphi},$$

et le lieu de ces sommets est la quartique

$$\frac{x^4}{a^2} + \frac{y^4}{b^2} = (x-y)^2.$$

3° Les coordonnées des foyers sont

$$x = a\cos\varphi \pm \sqrt{2ab\sin\varphi\cos\varphi},$$

$$y = b\sin\varphi \pm \sqrt{2ab\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Le lieu des foyers est la quartique

$$(b^2x^2 + a^2y^2)\left[\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}(b^2x^2 + a^2y^2) + 8(x-y)^2\right]$$

$$-2(a^2+b^2)[(2a^2+b^2)x^2 + (2b^2+a^2)y^2] + 16a^2b^2xy + a^2b^2(a^2+b^2) = 0.$$

(E. N. Barisien.)

Digitized by Google

×Question 1665.

(Voir *Mathesis*, (3), VIII, p. 80).

Soient A′, B′, C′ *les symétriques des sommets d'un triangle quelconque* ABC *par rapport aux côtés opposés;* A″B″C″ *le triangle dont* A′, B′, C′ *sont les milieux des côtés;* a', b', c' *les longueurs des côtés du triangle* A′B′C′; H, O *l'orthocentre de* ABC *et le centre du cercle circonscrit;* x, y, z, δ *les distances* OA, OB, OC, OH; x', y', z' *les distances* OA″, OB″, OC″; S *la surface et* V *l'angle de Brocard du triangle* ABC. *Démontrer les relations :*

$$x^2 = R^2(1 + 8\sin B \sin C \cos A), \ldots\ldots; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2 + 4S\cot V;$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \delta^2 = 12R^2; \qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 4S\cot V + 16\frac{S^2}{R^2},$$

$$R = \frac{ax}{a'} = \frac{by}{b'} = \frac{cz}{c'}; \qquad R = \frac{yz}{x'} = \frac{zx}{y'} = \frac{xy}{z'}$$

(Énoncé rectifié du n° 4).

Solution par M. Dalle (Malonne). 1° Dans le triangle OAA′, on a :

$$\text{angle } OAA' = B - C, \quad AA' = 4R\sin C \sin B;$$

d'où $x^2 = R^2 + 16R^2 \sin^2 C \sin^2 B - 8R^2 \sin C \sin B \cos(B - C)$,

ou, après réduction,

$$x^2 = R^2(1 + 8\sin B \sin C \cos A).$$

Par analogie,

$$y^2 = R^2(1 + 8\sin C \sin A \cos B), \quad z^2 = R^2(1 + 8\sin A \sin B \cos C)$$

2° $x^2 + y^2 + z^2 = 3R^2 + 8R^2 \sin A \sin B \sin C\, \Sigma \cot A$

$= 3R^2 + 4S\cot V$, puisque $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.

3° Sachant que $AH = 2R\cos A$, on a dans le triangle AHO,

$$\begin{aligned}\delta^2 &= R^2 + 4R^2\cos^2 A - 4R^2\cos A\cos(B - C)\\ &= R^2 - 4R^2\cos A[\cos(B + C) + \cos(B - C)]\\ &= R^2 - 8R^2\cos A\cos B\cos C.\end{aligned}$$

Par suite,

$$x^2 + y^2 + z^2 + \delta^2 = 4R^2 + 8R^2(\Sigma \sin B \sin C \cos A - \cos A\cos B\cos C);$$

ou encore,

$$x^2 + y^2 + z^2 + \delta^2 = 4R^2 - 8R^2\cos(A + B + C) = 12R^2$$

Digitized by Google

4° Dans le triangle AB′C′, on a :

$$a'^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 3A,$$

et, dans ABC,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

D'où

$$a'^2 = a^2 + 4bc \sin 2A \sin A = a^2 + 8S \sin 2A.$$

De même,

$$b'^2 = b^2 + 8S \sin 2B,$$

$$c'^2 = c^2 + 8S \sin 2C.$$

Par addition,

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 8S (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

$$= 4S \cot V + 16 \frac{S^2}{R^2}.$$

5° On a

$$\frac{a^2x^2}{a'^2} = \frac{a^2R^2 (1 + 8 \sin B \sin C \cos A)}{a^2 + 8S \sin 2A}$$

$$= \frac{R^2 (1 + 8 \sin B \sin C \cos A)}{1 + \dfrac{4 \sin B \sin C}{\sin A} 2 \sin A \cos A} = R^2.$$

D'où,

$$\frac{ax}{a'} = \frac{by}{b'} = \frac{cz}{c'} = R.$$

6° On a

$$\frac{y^2z^2}{x'^2} = \frac{R^4 (1 + 8 \sin C \sin A \cos B) (1 + 8 \sin A \sin B \cos C)}{x'^2}$$

Dans le triangle OB″C″, on a

$$y'^2 + z'^2 = 2x^2 + 2a'^2.$$

Semblablement dans OC″A″ et OA″B″, on a :

$$z'^2 + x'^2 = 2y^2 + 2b'^2, \quad x'^2 + y'^2 = 2z^2 + 2c'^2.$$

De ces relations, on tire :

$$x'^2 = (y^2 + z^2 - x^2) + (b'^2 + c'^2 - a'^2).$$

Introduisant les valeurs trouvées précédemment, on a :

$$x'^2 = R^2 [1 + 8 (\sin C \sin A \cos B + \sin A \sin B \cos C - \sin B \sin C \cos A] +$$

$$8R^2 [\sin B \sin C \cos A + 2 \sin A \sin B \sin C (\sin 2B + \sin 2C - \sin 2A)]$$

$$x'^2 = R^2 [(1 + 8 \sin C \sin A \cos B) (1 + 8 \sin A \sin B \cos C)]$$

Digitized by Google

Introduisant cette valeur de x'^2 dans $\frac{y^2z^2}{x'^2}$, on trouve

$$\frac{y^2z^2}{x'^2} = R^2.$$

d'où

$$R = \frac{yz}{x'} = \frac{zx}{y'} = \frac{xy}{z'}.$$

$$xx' = yy' = zz'.$$

Solutions partielles par M. Rose (nos 1-5), par M. Plakhovo (nos 1-3) et par M. Delahaye (Roye).

Question 1667.

(Voir *Mathesis* (3), VIII, p. 112.)

Montrer que si l'on a $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \lambda$, *il en résulte*

$$\int_0^x \frac{dx}{\sin^2 x + \lambda^2 \cos^2 x} - \int_0^y \frac{dy}{\sin^2 y + \lambda^2 \cos^2 y} = \frac{x-y}{\lambda}$$

(E. N. Barisien)

Solution par M. V. Retali. Appelant I la première intégrale et I' la deuxième, nous avons :

$$I = \int_0^x \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\lambda^2 + \operatorname{tg}^2 x} = \int_0^x \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\lambda^2 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\lambda}\right)$$

et, ayant égard à la relation $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \lambda$,

$$I = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arc\,tg}(\cot y) = \frac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{2}\pi - y\right);$$

de même,

$$I' = \frac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right)$$

et, par suite,

$$I - I' = \frac{1}{\lambda}(x - y).$$

Solutions analogues par MM. Verheugen et J. Rose.

Digitized by Google

Remarque. L'énoncé de la page 112, où les limites des intégrales sont $2c$ et $2y$, est fautif ; car en y faisant $\lambda = 1$, on aurait

$$\int_0^{2x} \frac{dx}{\sin^2 x + \lambda^2 \cos^2 x} = 2x, \quad \int_0^{2y} \frac{dy}{\sin^2 y + \lambda^2 \cos^2 y} = 2y,$$

d'où la relation absurde

$$x - y = 2(x - y)\ (*)$$

×Question 1670.

(Voir *Mathesis*, (3), VIII, 112).

Soient a, b, c trois arcs quelconques ; si l'on pose $a + b + c = p$ *et*

$$\cos p \cos(p - a) \cos(p - b) \cos(p - c) = C,$$

$$\sin p \sin(p - a) \sin(p - b) \sin(p - c) = S,$$

démontrer les relations

$$C + S = \cos a \cos b \cos c$$

$$2(C - S) = \sin^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 1.\ (**)$$

En faisant $-a + b + c + d = 2\alpha$, $a - b + c + d = 2\beta$, $\cdots$ *on a*

$$\cos a \cos b \cos c \cos d + \sin a \sin b \sin c \sin d =$$

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \cos \delta + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma \sin \delta$$

Solution par MM. Verheugen, Dalle, G. Casier (Bruges), Rose (Chimai), Delahaye, Lez, Prange, Barisien, Degueldre et Plackhovo.

On a successivement

$$4C = [\cos(b + c) + \cos a][\cos a + \cos(c - b)],$$

$$4S = [\cos a - \cos(b + c)][\cos(c - b) - \cos a],$$

$$4(C + S) = 2\cos a \cos(b + c) + 2\cos a \cos(c - b) = 4\cos a \cos b \cos c,$$

$$4(C - S) = 2\cos(b + c)\cos(c - b) + 2\cos^2 a = \cos 2b + \cos 2c + 2\cos^2 a$$

$$4(C - S) = 2\cos^2 a + 2\cos^2 b + 2\cos^2 c - 2,$$

$$2(C - S) = \cos 2a + \cos^2 b + \cos^2 c - 1.$$

(*) L'énoncé communiqué par M. Barisien était exact. C'est en le transcrivant que nous y avons introduit une erreur (*Red.*)

(**) Egalité rectifiée.

Digitized by Google

Des égalités $-a+b+c+d=2\alpha$ etc. on déduit facilement les suivantes :

$$a+b+c+d=\alpha+\beta+\gamma+\delta,\ a+b-c-d=-\alpha-\beta+\gamma+\delta,$$
$$a-b-c+d=-\alpha+\beta+\gamma-\delta,\ a-b+c-d=-\alpha+\beta-\gamma+\delta,$$

Cela étant, on a

$$4\cos a\cos b\cos c\cos d=$$
$$[\cos(a-b)+\cos(a+b)][\cos(c-d)+\cos(c+d)];$$
$$4\sin a\sin b\sin c\sin d=$$
$$[\cos(a-b)-\cos(a+b)][\cos(c-d)-\cos(c+d)];$$
$$4(\cos a\cos b\cos c\cos d+\sin a\sin b\sin c\sin d)=$$
$$2\cos(a-b)\cos(c-d)+2\cos(a+b)\cos(c+d)=$$
$$\cos(a-b-c+d)+\cos(a-b+c-d)+\cos(a+b-c-d)$$
$$+\cos(a+b+c+d).$$

On aurait, de même,

$$4(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta)=$$
$$\cos(\alpha-\beta-\gamma+\delta)+\cos(\alpha-\beta+\gamma-\delta)+\cos(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$$
$$+\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta).$$

Les deux seconds membres étant égaux on aura

$$\cos a\cos b\cos c\cos d+\sin a\sin b\sin c\sin d=$$
$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\cos\delta+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta.$$

M. Plakhovo remarque que les deux premières égalités résultent immédiatement des décompositions en facteurs des expressions $1-\cos^2a-\cos^2b-\cos^2c\pm 2\cos a\cos b\cos c$ que l'on rencontre en trigonométrie sphérique.

M. Dalle observe que les formules proposées s'appliquent respectivement à un triangle sphérique et à un quadrilatère sphérique quelconques de côtés a, b, c, d signale les formules analogues relatives aux angles de ces polygones.

×Question 1677.

(Voir *Mathesis*, (3), VIII, p. 175).

Résoudre complètement le système

$$x^3+y^3=-4a^5\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}.$$ (E. N. Barisien)

Digitized by Google

Solution par MM. J. Rose (Chimai), Verheugen, Ravasco (Lisbonne), Prange et Salkin (capitaine au 13e de ligne). La première équation s'écrit

$$(x+y)[(x+y)^2-3xy] = -4a^3,$$

ou en tenant compte de la seconde

$$(xy)^3 - 3a^2(xy)^2 + 4a^6 = 0,$$

ou $$(xy+a^2)(x^2y^2-4a^2xy+4a^4) = 0,$$

ou $$(xy+a^2)(xy-2a^2)^2 = 0.$$

Il en résulte les deux systèmes

$$\left\{\begin{array}{l} xy = -a^2, \\ x+y = -a; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} xy = 2a^2, \\ x+y = 2a, \end{array}\right.$$

le second étant compté deux fois.

Pour le premier, x et y sont racines de

$$X^2 + aX - a^2 = 0;$$

et pour le second, de

$$X^2 + 2aX + 2a^2 = 0.$$

D'où $$\left.\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right\} = \frac{a}{2}(\pm\sqrt{5}-1)$$

et

$$\left.\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right\} = a(-1 \pm i). \qquad (i = \sqrt{-1})$$

les dernières étant comptées deux fois.

M. Delahaye (Roye) a résolu le même système en prenant l'inconnue auxiliaire $x+y=au$: la seconde équation donne immédiatement $xy = a^2u$, etc.

QUESTIONS D'EXAMEN.

1404. On a les deux identités trigonométriques suivantes :

$$(\cos\varphi + \sqrt{\sin\varphi\cos\varphi})^4 + (\sin\varphi + \sqrt{\sin\varphi\cos\varphi})^4$$
$$= (\cos\varphi + \sin\varphi + 2\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi})^2,$$

$$(\cos\varphi + \sqrt{-\sin\varphi\cos\varphi})^4 + (\sin\varphi - \sqrt{-\sin\varphi\cos\varphi})^4 = (\cos\varphi - \sin\varphi)^2.$$

(E. N. Barisien)

Digitized by Google

1405. Résoudre l'équation

$$\frac{a}{x-b}+\frac{b}{x-a}-\frac{2x}{a+b}=0.$$

(E. N. Barisien)

L'équation développée se ramène à

$$[x-(a+b)]\,[2x^2-(a^2+b^2)]=0.$$

1406. Vérifier les relations suivantes entre des fonctions hyperboliques :

$$\mathrm{Th}a+\mathrm{Th}2a-\mathrm{Th}3a=\mathrm{Th}a\cdot\mathrm{Th}2a\cdot\mathrm{Th}3a,$$

$$4(\mathrm{Sh}a\cdot\mathrm{Ch}^3a+\mathrm{Sh}^3a\cdot\mathrm{Ch}a)=\mathrm{Sh}4a.$$

(Abramescu)

1407. Soient a, b, c, d les côtés d'un quadrilatère inscriptible, et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les distances de ces côtés au centre de la circonférence circonscrite. Démontrer les relations

$$a\beta+b\alpha=c\delta+d\gamma,\quad a\delta+d\alpha=b\gamma+c\beta,\quad a\gamma+c\alpha=b\delta+d\beta.$$

(Müller)

Appliquer le théorème de Ptolémée aux quadrilatères inscriptibles formés par α et β avec a et b, et par γ et δ avec c et d. La 3me relation se ramène aux deux premières en intervertissant deux côtés consécutifs (quadrilatère $acdb$).

De ces relations on peut déduire les rapports $a:b:c:d$ et par suite une construction des quadrilatères dont on donne les distances $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Mais il est plus simple de conclure de la symétrie des égalités par rapport aux deux espèces de quantités a, b, c, d et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ que $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}, \frac{d}{2}$ sont les distances des côtés du quadrilatère inscrit de côtés $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$ au centre du cercle inscrit; ce que l'on peut aussi constater au moyen de la figure en prolongeant α et β jusqu'à la rencontre avec la circonférence de centre B et de même rayon que la première.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1686. Intégrer les équations différentielles

$$1^\circ\ x^3y''=(y-xy')^2;\qquad 2^\circ\ yy''-y'^2+\frac{y}{x}y'=0.$$

1687. On considère toutes les ellipses passant par quatre points donnés A, B, C, D. Si $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$, $(a\cos\beta, b\sin\beta)$,.. sont les

Digitized by Google

coordonnées des points A, B, C, D par rapport aux axes de l'une quelconque de ces ellipses, la quantité

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

a une valeur constante. (WHITEHEAD)

×1888. Étant donné un tétraèdre quelconque $A_1A_2A_3A_4$, désignons par V son volume, par s_i l'aire de la face opposée au sommet A_i, par a_{ik} la longueur de l'arête A_iA_k, enfin par (s_is_k) le dièdre compris entre les plans des faces s_i, s_k. Démontrer les relations

1° $$s_1^2+s_2^2-2s_1s_2\cos(s_1s_2)=s_3^2+s_4^2-2s_3s_4\cos(s_3s_4),\ \cdots$$

2° $$\frac{9}{16}(a_{12}\pm a_{34})^2V^2$$
$$=(\sigma-s_1)(\sigma-s_2)(\sigma-s_3)(\sigma-s_4)-s_1s_2s_3s_4\cos^2\frac{(s_1s_2)\pm(s_3s_4)}{2},$$

où $$2\sigma=s_1+s_2+s_3+s_4.$$ (SCHWERING)

La dernière relation donne des conséquences intéressantes lorsque la somme ou la différence de deux arêtes opposées est égale à la somme ou à la différence de deux autres arêtes opposées. L'hypothèse $s_1s_2-s_3s_4=\pi$ rappelle le quadrilatère inscrit à un cercle, le tétraèdre correspondant peut-être de genre des tétraèdres.

×1889. On a identiquement:

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible] $=0.$
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]

1890. [illegible]

Digitized by Google

EN VENTE CHEZ LES MÊMES LIBRAIRES

H. Schuermans. Développement d'une puissance quelconque d'un polynome. Gand, Vanderpoorten, 1908. (In-folio de 81 pp.) . . . . fr. 6 00

V. v. Dantscher. Vorlesungen über die Weierstrassche Theorie der Irrationalen Zahlen. LT, 1908 (In-8, de VI-80 pp.) . . . . . marcs 2 80

A. Schoenflies. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Zweiter Teil. LT, 1908 (In-8 de X-330 pp.) . . . . marcs 12 00

F. Enriques. Fragen der Elementar-Geometrie. II. Teil. Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. LT, 1907 (Cartonné in-8 de XII-348 pp.) . . . . . marcs 9 00

O. Richter. Kreis und Kugel in senkrechter Projection LT, 1908 (In-8 de X-188 pp) . . . . . marcs 4 40

C. Runge. Analytische Geometrie der Ebene. LT, 1908 (In-8 cartonné de IV-198 pp.) . . . . . marcs 6 00

R. Sturm. Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. Erster Band : Die Verwandtschaften zwischen Gebilden erster Stufe. LT, 1908 (Cartonné, in 8 de XII-416 pp. et de VIII-346 pp.) . . . marcs 32 00

M. Fr. Daniels. Essai de Géométrie sphérique en coordonnées projectives. Fribourg (Suisse), O. Gschwend, 1907 (Gr. in-8° de XII-280 pp. avec 44 fig.).

R. v. Lilienthal. Vorlesungen über Differentialgeometrie. Erster Band : Kurventheorie. LT, 1908 (In-8 cartonné de VI-368 pp.). marcs 12 00

E. Müller. Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. Erster Band. LT, 1908 (In-8 cartonné de XIV-368 pp. avec 8 planches). marcs 12 00

Léon Lecornu. Dynamique appliquée. Paris, Doin (Cartonné de 534 pp. in-12) fr. 5.00

M. Planck. Das Princip der Erhaltung der Energie. Zweite auflage. LT, 1908 (In-12 cartonné de XVI-278 pp.) . . . . . marcs 6 00

R. Gans, Einführung in die Theorie des Magnetismus LT, 1908 (In-12 de VI-110 pp.) . . . . . marcs 2 40

K. W. Wagner. Elektromagnetische Ausgleichungsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. LT, 1908 (In-12 de IV-110 pp.). . . . . marcs 2 40

Cl. Schaefer. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Electrizität und des Magnetismus. LT, 1908 (In-12 de VIII-174 pp. avec portrait de Maxwell). marcs 3 40

Avis aux auteurs de questions résolues.

Prière instante aux auteurs de questions résolues de les envoyer à la Rédaction de *Mathesis* sous une forme qui permette de les livrer à l'impression sans leur faire subir des retouches. Pour cela : 1° Ecrire sur une première ligne le mot *question* précédé ou non de la croix et le n° de la question, et soulignés par une ligne ondulée 2° Ecrire sur une seconde ligne, avec la parenthèse habituelle, Mathesis, *sans accent*, ce mot étant souligné, avec l'indication de l'endroit où la question a été posée. 3° Transcrire l'énoncé de la question, souligné en entier. 4° Mettre au bout le nom de l'auteur de la question souligné *deux* fois, entre parenthèses. 5° Commencer les premières lignes de la solution, par les mots : *Solution par* soulignés une fois, suivi du nom de l'auteur souligné *deux* fois. 6° Continuer, sans aller à la ligne 7° Dans le texte de la solution, aller à la ligne chaque fois que l'on doit écrire une égalité ou une équation qui n'est pas très courte. 8° Ecrire $\frac{1}{2}a$ plutôt que $\frac{a}{2}$; $(n-p)$ plutôt que $\overline{n-p}$: *angle* ABC plutôt que $\widehat{ABC}$, $\sqrt{a}$ plutôt que $\sqrt{a.}$ 9° Observer les règles de ponctuation *française*, et non celles de la ponctuation *belge*. 10° Laisser une marge.

Prière à nos correspondants de joindre leur adresse PRÉCISE à CHACUN de leurs envois, au bas de leur article.

Digitized by Google

SOMMAIRE.

	Pages
Sur le théorème de Feuerbach, par M. J. Neuberg	201
Sur le théorème des deux moyennes, par M. A. Aubry.	206
Sur l'aire d'une certaine quartique, par M. E. N. Barisien	211
Bibliographie	212
Notes mathématiques	216
Solutions de questions proposées (1087, 1661, 1663, ×1665, 1667, ×1670, ×1677)	219
Questions d'examen (1404, 1405, 1406, 1407)	230
Questions proposées (1686, 1687, ×1688, ×1689, 1690)	231

Les articles marqués d'une croix peuvent être compris. les questions marquées d'une croix peuvent être résolues, au moyen des mathématiques élémentaires.

Les articles destinés à *Mathesis* doivent être adressés *franco de port*, à M. P. MANSION, quai des Dominicains, 6, Gand, ou à M. J. NEUBERG, rue de Sclessin, 6, Liége.

Ils doivent être écrits lisiblement et sur un seul côté de la feuille. Une même feuille doit contenir un seul article ou une seule question résolue, **précédée de l'énoncé de la question**. Les auteurs de notes *exigeant des figures* sont priés de *dessiner celle-ci, avec soin, dans le format du journal, sur des feuilles séparées*. Les auteurs de *Questions à résoudre* sont priés de donner, avec les énoncés, *un aperçu des solutions*.

La Rédaction ne renvoie pas les manuscrits non insérés.

Les auteurs d'articles insérés dans *Mathesis*, qui en avertissent la **Rédaction** à temps, *en donnant leur adresse*, peuvent obtenir des tirages à part moyennant 5 francs, par feuille ou fraction de feuille, pour 100 exemplaires, 3 francs pour 50 exemplaires, 2 francs pour 30 exemplaires, frais de remaniement non compris.

Les ouvrages de mathématiques dont on enverra un ou deux exemplaires à M. P. MANSION, seront annoncés ou analysés dans le journal. Prière d'en d'indiquer le prix.

Mathesis paraît, en général, vers le 15 de chaque mois, par livraisons de 24 pages, qui peuvent être accompagnées de suppléments. Prix de l'abonnement annuel (**payable par anticipation**) :

Pour la Belgique	fr. 7 50
Pour l'Etranger.	» 9 00

On s'abonne chez M. AD. HOSTE, rue des Champs, 47, Gand (par un mandat postal, p. ex.) et chez M. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris.

Les réclamations, changements d'adresse, etc.. doivent être adressés, NON aux rédacteurs, mais à M. HOSTE.

Les nouveaux abonnés de *Mathesis* qui en feront la demande à M. MANSION, *en donnant leur adresse exacte*, recevront gratuitement les articles intitulés : 1° *Les premiers principes de la géométrie*, par M. DE TILLY ; 2° *Un autre mémoire* ; 3° *Sur la méthode analytique des anciens*, par M. P. MANSION; 4° *Questions d'admission à l'Ecole militaire de Bruxelles* (1904) (ensemble 47 pages), ou d'autres Mémoires équivalents.

Digitized by Google

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Professeur ordinaire à l'Université de Gand, | Professeur ordinaire à l'Université de Liége
Anciens élèves de l'École normale des sciences,
Membres de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ETRANGERS.

Ut pictura mathesis
PH. BRETON

TROISIÈME SÉRIE

TOME VIII — NOVEMBRE 1908.

(TOME XXVIII DE LA COLLECTION).

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
21-23, RUE DU CALVAIRE, 21-23

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, QUAI DES GRANDS AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1908

Digitized by Google

EN VENTE CHEZ M. GAUTHIER-VILLARS A PARIS ET M. HOSTE A GAND.

Mathesis. Tome I (280 pages), 1881. II (272 p.). 1882. III (292 p.), 1883. IV (324 p.), 1884. V (432 p.), 1885. VI (368 p.), 1886. (Rares), VII (408 p.), 1887. VIII (358 p.), 1888. IX (344 p.), 1889. X (312 p.), 1890. XI (347 p.), 1891. XII (366 p.), 1892. XIII (381 p.), 1893. XIV (295 p.). 1894. XV (364 p.), 1895. XVI (396 p.), 1899. XVII (336 p.), 1897. XVIII (348 p.), 1898. XIX (312 p.), 1899. XX (318 p.), 1900. XXI (343 p.), 1901. XXII (334 p.), 1902. XXIII (312 p.), 1903. XXIV (384 p.), 1904. XXV (336 p.), 1905. XXVI (384 p.), 1906. XXVII (344 p.) 1907 Gr. in-8°. Gand, fr. 7 50; à Paris, fr. 9 00.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par Liouville (1836), continué (1875) par H. Resal, publié, depuis 1885, en livraisons trimestrielles, par C. Jordan. Prix de l'abonnement, *pris à Paris*, 30 fr.; union postale 35 00

PGV = PARIS, GAUTHIER-VILLARS LT = LEIPZIG, B. G. TEUBNER.

E. Schröder und Müller. Abriss der Algebra der Logik. Erster Teil. Elementarlehre (In 8 de V-50 pp.) . . . . . marcs 1 60

L. Delègue. Essai sur les principes des sciences mathématiques. Paris, Vuibert et Nony, 1908 (In-8 de 134 pp.) . . . . . fr. 4 00

A. Maroger. Leçons critiques et historiques sur les fondements des mathématiques. Paris, Vuibert et Nony, 1908 (In-8° de XV 204 pp.).

A. Voss. Über das Wesen der Mathematik. LT, 1908 (In-8 de 98 pp.) marcs 3 60

Festschrift zur Feier des 200. Geburtstages Leonard Eulers. LT, 1907 (In-8 de IV-137 pp. in-8; deux portraits) . . . . . marcs 5 00

P. Stäckel und W. Ahrens. Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuss über die Herausgabe der Werke Leonard Eulers. LT, 1908 (In-8 de XII-184 pp.) . . . . . marcs 8 00

Gino Loria. Il passato ed il presente delle principali Teorie geometriche. Terzaedizione accrescinta di uno Sguardo allo sviluppo della Geometria in quest'ultimo decennio. Torino, H. Rinck (Clausen), 1907. (Cartonné in-8 de XXIV-475 pp.) . . . . . .

W. Rouse Ball. Récréations mathématiques, etc. Deuxième partie. Deuxième édition française, avec additions, par J. Fitz-Patrick. Paris, Hermann, 1908 (In-12 de VIII-363 pp.) . . . . . fr. 5 00

H. Minkowski. Diophantische Approximationen, eine Einführung in die Zahlentheorie. LT, 1907 (Cartonné in-8 de VIII-236 pp.) . . marcs 8 00

F. Sommer. Vorlesungen über Zahlentheorie. LT, 1907 (In-8, cartonné de VI-361 pp.) . . . . . marcs 11 00

K. Hensel. Theorie der algebraischen Zahlen. Erster Band. LT, 1908 (Cartonné in-8 de XI-349 pp.) . . . . . marcs 14 00

de Laplanche. Etude sur les angles imaginaires. Paris, Hermann, 1908 (In-8 de 135 pp.) . . . . . fr. 8 00

E. Czuber. Einführung in die höhere Mathematik. LT, 1909 (In-8 cartonné de X-382 pp.) . . . . . marcs 12 00

E. Fabry. Traité de mathématiques générales, à l'usage des chimistes, physiciens, etc. Paris, Hermann, 1909 In-8 de X-440 pp.). . . . . fr. 9 00

H. Burkhardt. Vorlesungen über die Elemente der Differentialrechnung. LT, 1907 (Cartonné in-8 de XI 252 pp.) . . . . . marcs 6 00

L. Nielsen. Lehrbuch der unendlichen Reihen. LT, 1909 (In-8 de VIII-288 pp.) marcs 11 00

J. Thomae. Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fouriersche Reihen LT, 1908 (In-8 cartonné VI-182 pp.). . . . . marcs 7 80

L. Schlesinger. Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen. LT, 1908 (In 8 de X-334 pp.). . . . . marcs 10 00

P. Schafheitlin. Die Theorie der Besselschen Funktionen. LT, 1908 (In-12 de V-130 pp. avec une planche) . . . . . marcs 3 80

O. Bolza. Vorlesungen über Variationsrechnung. Erste Lieferung. LT, 1909 (In-8 de IV-300-10 pp.) . . . . . marcs 8 00

Durège u. Maurer. Theorie der elliptischen Functionen. 5te Auflage. LT, 1908 (In-8, cartonné de VIII-436 pp.) . . . . . marcs 11 00

W. Scheibner. Beträge zur Theorie der linearen Transformationen. LT, 1907 (In-8 de 250 pp.) . . . . . marcs 10 00

J. Schumacher. Ein Rechenschieber mit Teilung in gleiche Intervalle. München, Lindauersche Buchhandlung, 1909 (In-8 de IV-48 pp. avec 2 planches). marc 1 00

Digitized by Google

SUR DEUX THÉORÈMES DE SIMSON ET DE STEINER ET LE THÉORÈME DE M. AUBERT,

par M. J. Juhel-Rénoy.

Mathesis (Juin 1908) publie un intéressant article de M. J. Neuberg « *Sur un théorème de M'Kenzie et sa généralisation* » :

« Théorème. Soit ABC un triangle inscrit à une conique K. Les droites qui joignent les sommets à un point quelconque P rencontrent de nouveau la conique en A', B', C'. Les droites qui joignent ces derniers points à un point quelconque M de la courbe rencontrent respectivement BC, CA, AB en des points α, β, γ qui sont en ligne droite avec le point P ».

Le but de cette note est de montrer la relation qui existe entre ce théorème et deux théorèmes bien connus de Simson et de Steiner.

I. Théorème de Simson. Si d'un point M du cercle circonscrit à un triangle ABC, on mène des perpendiculaires aux côtés du triangle qui rencontrent la circonférence en A', B', C' et les côtés du triangle BC, CA, AB en α, β, γ, les trois points α, β, γ sont en ligne droite. On voit immédiatement que AA' et BB' sont parallèles, que CM et BB' sont antiparallèles par rapport à BC et MB', et qu'il en est de même de $\beta\alpha$ et de MC. On en déduit que AA', BB' et $\alpha\beta$ sont parallèles. Le théorème de Simson résulte immédiatement de là. Si l'on remarque maintenant que la démonstration repose uniquement sur ce fait que AA' et BB' sont parallèles, on voit que, *à cette condition*, le point M pourra être pris arbitrairement sur la circonférence sans que $\alpha\beta$ cesse d'être parallèle à AA' et BB'. Il suffit alors de faire une projection centrale pour avoir le théorème de M. Aubert.

Mais le théorème de Simson, ainsi envisagé, est susceptible d'une certaine extension. En effet, menons MM' parallèle à AA', le point M' étant sur la circonférence. MA' et M'A sont symétriques par rapport au diamètre perpendiculaire à AA' ; de même, BC et B'C' ; donc le point d'intersection de M'A et B'C' est sur la droite $\alpha\beta\gamma$.

Une projection conique donne la généralisation du théorème de Pascal, indiquée par M. Aubert.

Remarque. Le théorème de Pascal permet de voir immédiatement

Digitized by Google

que $\alpha\beta$ et AA′ sont parallèles. Il suffit de considérer l'hexagone inscrit MA′A.CBB′ :

MA′ et CB se coupent en α,
A′A et BB′ » » à l'infini,
AC et B′M » » en β.

II. Théorème de Steiner. Les hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole se coupent sur la directrice.

Faisons une transformation par polaires réciproques en prenant pour centre du cercle directeur le foyer M. La parabole se transforme en un cercle passant par M ; les trois tangentes en trois points A, B, C de la circonférence ; une tangente et la hauteur correspondante étant perpendiculaires, leurs pôles sont vus de M sous un angle droit ; α, le pôle d'une des hauteurs, se trouve donc sur BC et sur MA′ ; on en conclut que α, β, γ et le centre O du cercle sont en ligne droite. Il suffit de faire une projection centrale pour obtenir le théorème qui fait l'objet de cette étude.

Quant à la généralisation du théorème de Pascal, on l'obtient en transformant par polaires réciproques le théorème suivant dont la démonstration est immédiate :

Si a, b, c sont trois tangentes à la parabole, a′, b′, c′ les trois tangentes respectivement perpendiculaires, le point de concours des hauteurs du triangle abc se confond avec le point d'intersection des trois droites joignant un sommet du triangle a′b′c′ à la projection du foyer sur le côté opposé du triangle abc.

En effet, considérons l'hexagone circonscrit

$$s\ a\ b\ b'\ c'\ \gamma$$

s étant la tangente au sommet ; on voit, d'après le théorème de Brianchon, que la droite qui joint les deux points (s, a) et (b', c') passe par le point de concours des hauteurs du triangle *abc* et, par suite, les trois droites joignant (s, a) et (b', c'), (s, b) et (a', c'), (s, c) et (a', b') se coupent sur la directrice au point de concours des hauteurs du triangle *abc*.

Remarque. Le théorème de Steiner étant un cas particulier de celui de Brianchon, qui se déduit lui-même du théorème de Pascal par polaires réciproques, le théorème de M. Aubert se déduit de celui de Pascal au moyen d'une double transformation par polaires réciproques.

Digitized by Google

CONCOURS GÉNÉRAL DE L'ENSEIGNEMENT MOYEN (1908).

Première Scientifique.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Etant donnée une hyperbole H *rapportée à ses axes de symétrie, on mene une droite d par le point* P *où la directrice correspondante au foyer* F *rencontre l'axe focal.*

1° *Trouver l'équation de la conique* C *passant par le foyer* F *et doublement tangente à l'hyperbole* H, *la corde de contact étant la droite d. Prouver que cette conique* C *est tangente à l'axe focal de* H.

2° *Discuter l'équation trouvée et reconnaitre la nature des coniques qu'elle peut représenter lorsque la droite d tourne autour du point* P. *Déduire d'un cas particulier de cette discussion une définition classique du foyer. Construire les positions de d pour lesquelles* C *est une parabole.*

3° *Montrer que, en général, par tout point* Q *passent deux des coniques* C *considérées dans le* 2°, *et reconnaitre les régions dans lesquelles doit se trouver le point* Q *pour que ces coniques soient réelles.*

4° *Faire voir que le diamètre e de la conique* C *conjugué aux cordes parallèles à la droite d est confondu avec le diamètre de l'hyperbole donnée* H *conjugué aux cordes parallèles de même direction.*

Le diamètre de H *perpendiculaire au diamètre* E *rencontre les parallèles aux axes de symétrie de* C *menées par* F *en deux points; chercher le lieu décrit par ces points, lorsque la droite d tourne autour de* P. *Rapporter ce lieu, qui est une hyperbole, à son centre et à ses axes de symétrie, puis à ses asymptotes.*

De très bonnes solutions de cette question nous ont été adressées par MM. LISTRAY (Namur), ROSE (Chimay), VERHEUGEN (Gand) et HACKEN (Ostende). Elles ne présentent que des différences peu essentielles avec la suivante.

1° L'équation de H étant

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0,$$

P a pour coordonnées $\left(\frac{a^2}{c}, 0\right)$ et d a une équation de la forme

$$y - m\left(x - \frac{a^2}{c}\right) = 0,$$

où m est un paramètre qui peut varier de $-\infty$ à $+\infty$.

Digitized by Google

L'équation d'une conique C doublement tangente à H, la corde de contact étant d, est

$$a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 - \lambda\left[y - m\left(x - \frac{a^2}{c}\right)\right]^2 = 0.$$

En exprimant que cette courbe passe par le point F $(c, 0)$ on trouve $\lambda = -c^2 : m^2$; en substituant cette valeur et en ordonnant on obtient pour l'équation cherchée :

$$(a^2m^2 + c^2)y^2 - 2c^2mxy + a^2m^2x^2 + 2a^2cmy - 2a^2cmx + a^2c^2m^2 = 0.$$

En y faisant $y = 0$ on trouve $(x - c)^2 = 0$; donc C touche Ox en F.

2° Le binome caractérisant le genre de C est

$$\delta = m^2(b^2c^2 - a^4m^2),$$

et le discriminant est $\Delta = -m^4a^2b^4c^2$. Par conséquent :

Si $m > \frac{bc}{a^2}$, ou $< -\frac{bc}{a^2}$, la courbe est une ellipse ; celle-ci est réelle puisqu'elle a au moins un point réel F et que le discriminant n'est pas nul.

Si m est compris entre $-\frac{bc}{a^2}$ et $\frac{bc}{a^2}$, on a une hyperbole proprement dite, Δ étant différent de zéro.

Si $m = 0$, on a $\Delta = 0$, et $\delta = 0$; donc C est une droite double. Effectivement, l'équation, de C se réduit à $y^2 = 0$, résultat évident à priori.

Enfin, si $m = -\frac{bc}{a^2}$ ou $= \frac{bc}{a^2}$, C est une parabole. En remarquant qu'alors $m = \pm\frac{b}{OP}$, on voit que les positions correspondantes de d passent par un sommet imaginaire de H.

Si B et B′ sont les extrémités de l'axe imaginaire de H, les droites menées par P dans l'angle BPB′ donnent pour C des hyperboles ; les autres conduisent à des ellipses.

Il reste à examiner l'hypothèse $m = \infty$, qui fait coïncider d avec la directrice de H. L'équation générale de C, après division par m^2, se réduira, pour $m = \infty$, à

$$y^2 + (x - c)^2 = 0 ;$$

C devient donc un cercle de centre F et de rayon nul. Effectivement, le

Digitized by Google

foyer F peut être considéré comme un cercle de rayon nul et ayant un double contact avec H sur la directrice.

3° Ecrivons l'équation de C ainsi :

$$a^2m^2[y^2+(x-c)^2]-2mcy(cx-a^2)+c^2y^2=0$$

et considérons-y les coordonnées x, y comme celles d'un point Q par lequel on veut faire passer la courbe. Cette équation donnant deux valeurs de m, il passe par Q deux courbes C ; son discriminant est

$$c^2y^2(b^2x^2-a^2y^2-a^2b^2).$$

On sait que la dernière parenthèse est positive ou négative suivant que le point (x, y) est intérieur à une branche d'hyperbole ou situé entre les deux branches. Par conséquent :

Si Q est intérieur à une branche, il passe par ce point deux courbes réelles.

Si Q est entre les deux branches, il n'y passe pas de conique réelle

Si Q est sur l'hyperbole H, il y passe une seule courbe C.

L'hypothèse $y=0$ donne aussi pour m deux valeurs égales ; on l'a déjà examinée ci-dessus.

4° En appliquant l'équation $f'_x+mf'_y=0$ à la courbe C, on trouve pour e : $y=\frac{b^2}{a^2m}x$; ce résultat s'explique à priori : si les tangentes communes menées aux extrémités de la corde commune d se coupent en R, la droite joignant R au milieu de cette corde est un diamètre de C et de H.

Le diamètre de H perpendiculaire à e a pour équation

$$y=-\frac{a^2m}{b^2}x. \qquad (a)$$

D'autre part, l'équation quadratique des parallèles aux axes de symétrie de C menées par F est

$$[y-k_1(x-c)][y-k_2(x-c)]=0, \qquad (b)$$

k_1 et k_2 étant racines de l'équation aux coefficients angulaires des axes, à savoir :

$$mk^2+k-m=0.$$

En développant l'équation (b) et remplaçant k_1k_2 par -1, k_1+k_2 par $-\frac{1}{m}$, on trouve :

$$y^2+\frac{1}{m}y(x-c)-(x-c)^2=0.$$

Digitized by Google

Il reste à éliminer m entre (a) et (c) ; le lieu cherché est donc l'hyperbole

$$b^2y^2 - c^2x^2 + c\,(b^2 + c^2)\,x - b^2c^2 = 0.$$

En transportant les axes coordonnés au centre $\left(\frac{b^2+c^2}{2c}, 0\right)$ on trouve :

$$b^2y^2 - c^2x^2 + \frac{a^4}{4} = 0.$$

L'hyperbole cherchée a donc pour demi-axes $\frac{a^2}{2c}$, $\frac{a^2}{2b}$; rapportée à ses asymptotes, elle a pour équation

$$xy = \frac{a^4\,(b^2+c^2)}{16b^2c^2} :$$

car la puissance doit être égale au quart du carré de la demi-excentricité.

Seconde Scientifique.

ALGÈBRE, GÉOMÉTRIE, TRIGONOMÉTRIE.

I. 1° *Calculer la valeur de x, nombre rationnel > 1 et non carré parfait sachant que :*

a) le premier quotient incomplet de la fraction continue qui peut exprimer la valeur de $\sqrt{x}$ est a ;

b) la période de cette fraction continue contient quatre quotients incomplets ;

c) les deux premiers quotients incomplets de la période sont 3 *et* 1.

2° *Montrer qu'il existe une infinité de valeurs entières de a en progression arithmétique, pour lesquelles x est entier.*

3° *Quelle est la valeur entière de a qui donne à x sa plus petite valeur entière. Vérifier directement que la racine carrée de cette valeur de x donne effectivement naissance à une fraction continue de la forme du* 1°.

I. *Solution par* M. J. ROSE (Chimay). 1° On peut écrire

$$\sqrt{x} = (a, 3, 1, 3, 2a, 3, 1, \ldots)$$

car le dernier quotient incomplet de la période est double du quotient

Digitized by Google

incomplet non périodique et les autres sont symétriques. D'autre part, si $\frac{Q}{Q'}$ est l'avant-dernière réduite d'une période, on a

$$Q^2 - nQ'^2 = \pm 1$$

suivant que la réduite est de rang pair ou impair. D'autre part, les réduites successives sont

$$\frac{a}{1}, \frac{3a+1}{3}, \frac{4a+1}{4}, \frac{15a+4}{15}.$$

On a donc

$$(15a+4)^2 - 15^2 x = 1$$

$$x = \frac{(15a+4)^2 - 1}{15^2} = a^2 + \frac{8a+1}{15}.$$

2° Pour que x soit entier, il faut que $\frac{8a+1}{15}$ le soit, c'est-à-dire que a soit une solution entière de l'équation indéterminée

$$8a - 15y = -1.$$

Or, les solutions de cette dernière sont contenues dans les formules générales suivantes :

$$a = 13 + 15t \quad y = 7 + 8t.$$

On voit donc qu'il y a une infinité de valeurs de a formant une progression arithmétique et dont la raison est 15, pour lesquelles x est entier.

3° La plus petite valeur de a rendant x entier est $a = 13$ et la valeur correspondante pour x est 176. Du reste en développant $\sqrt{176}$ en fraction continue on trouve le développement

$$\sqrt{176} = (13, 3, 1, 3, 26\ldots).$$

II. *D'un point* P *de la surface d'une sphère comme pôle avec une ouverture de compas* PA $= 2a$, *on trace sur la sphère une circonférence.*

Sur cette circonférence, on marque trois points A, B, C, *qui sont les sommets d'un triangle équilatéral dont le côté vaut* $3a$.

1° *Calculer en fonction de a*

a) le rayon de cette sphère;

b) la longueur du périmètre du triangle sphérique T *polaire d'un triangle sphérique* T′ *équivalent aux* $\frac{2}{5}$ *de la zone* PABC.

Digitized by Google

2° *Avec quelle ouverture de compas* PD, *de* P *comme pôle, faut-il décrire sur la surface de la sphère une seconde circonférence* DEF, *pour que le segment sphérique situé entre les plans* ABC, DEF *vaille m fois la partie du volume de la sphère comprise entre les surfaces latérales des cônes dont* P *est le sommet commun, et dont les bases respectives sont les circonférences* ABC, DEF? *Discuter en faisant varier le nombre m. On posera* PD $= x$.

Solution par M. J. Rose. 1° Soient K et L les centres des cercles ABC, DEF. On a

$$AK = a\sqrt{3}, \quad PK = a, \quad \text{diamètre} = \frac{\overline{PA}^2}{PK} = 4a.$$

$$\text{Zone PABC} = 2\pi\,(2a).\ a = 4\pi a^2.$$

$$\text{Triangle sphérique T}' = \frac{2}{3}\,\text{zone} = \frac{8}{3}\,\pi a^2.$$

Soient α, β, γ, les angles de ce triangle et p le périmètre de son triangle polaire T, rapporté au quadrant ou à l'angle droit. On a

$$\alpha + \beta + \gamma + p = 6\text{dr}.$$

$$\frac{8}{3}\,\pi a^2 = (\alpha + \beta + \gamma - 2)\,\frac{1}{8}\cdot 4\pi(2a)^2;$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{10}{3}\,\text{dr}, \quad p = \frac{8}{3}\,\text{dr}.$$

$$\text{longueur de } p = \frac{8}{3}\cdot\frac{2\pi(2a)}{4} = \frac{8}{3}\,\pi a.$$

2° On a, L étant le centre du cercle DEF,

$$PL = \frac{x^2}{4a}, \quad KL = \frac{x^2}{4a} - a = \frac{x^2 - 4a^2}{4a},$$

$$\overline{DL}^2 = \frac{x^2}{4a}\left(4a - \frac{x^2}{4a}\right) = \frac{x^2(16a^2 - x^2)}{16a^2},$$

$$\text{Vol. segment} = \frac{\pi}{6}\,KL(3\overline{AK}^2 + 3\overline{DL}^2 + \overline{KL}^2)$$

$$= \frac{\pi(x^2 - 4a^2)}{24a}\left[9a^2 + \frac{3x^2(16a^2 - x^2)}{16a^2} + \frac{(x^2 - 4a^2)^2}{16a^2}\right],$$

$$\text{Vol. APD} = \frac{\pi}{6}\,x^2\cdot PL - \frac{\pi}{6}\,(2a)^2\cdot PK = \frac{\pi(x^4 - 16a^4)}{24a}.$$

Digitized by Google

D'où l'équation

$$\frac{\pi(x^2-4a^2)}{24a}\left(\frac{160a^4+40a^2x^2-2x^4}{16a^2}\right)=\frac{m\pi(x^4-16a^4)}{24a},$$

ou, en supprimant la solution évidente $x=2a$,

$$x^4-4a^2(5-2m)x^2-16a^4(5-2m)=0;$$

d'où $$x^2=2a^2\left[(5-2m)\pm\sqrt{(5-2m)(9-2m)}\right].$$

Il faut d'abord que m soit en dehors des racines du trinôme sous le radical, c'est-à-dire $<\frac{5}{2}$ ou $>\frac{9}{2}$. Mais les dernières valeurs elles-mêmes doivent être rejetées, car elles donnent pour x^2 des valeurs négatives. De plus, pour $m<\frac{5}{2}$, x^2 a une valeur positive et une valeur négative (qu'il faut rejeter). Pour $m=\frac{5}{2}$, on trouve $x=0$ ce qui correspond au point P, chose que l'on vérifie aisément. (*)

III. *On donne les côtés a, b et l'angle compris* φ *d'un triangle* ABC.

1° *Trouver en fonction de a, b,* φ, *le volume engendré par ce triangle tournant autour d'une droite* X *située dans son plan, passant par le sommet* A *(opposé à a) et perpendiculaire à b.*

2° *Rechercher et construire la valeur de* φ *pour laquelle ce volume passe par un maximum en admettant que les côtés a et b restent constants et l'angle* φ *varie de* 0° *à* 180°. ($b\geqq a$).

Solution par M. J. Rose. 1° Soient D, E les projections de B sur EX et sur AC. On a

$$AD=a\sin\varphi,\quad \overline{AB}^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi,$$
$$BD=EA=CA-CE=b-a\cos\varphi.$$

Donc

$$\text{Vol. ABC}=\frac{\pi AD}{3}(\overline{BD}^2+\overline{AC}^2+BD\cdot AC)-\frac{\pi AD}{3}\cdot\overline{BD}^2$$
$$=\frac{\pi AD}{3}\cdot AC(AC+BD)=\frac{\pi ab}{3}\sin\varphi(2b-a\cos\varphi).$$

(*) Discussion incomplète, car il faut examiner si x est $<4a$ et distinguer les deux cas où le cercle DEF est compris ou non entre P et le cercle ABC.
(*Rédaction*)

Digitized by Google

2° Il faut donc chercher le maximum de

$$\sin\varphi\,(2b - a\cos\varphi) \quad \text{ou de} \quad \sin^2\varphi\,(2b - a\cos\varphi)^2$$

ou de $$v = (1 - \cos\varphi)(1 + \cos\varphi)(2b - a\cos\varphi)^2.$$

On pose

$$v = \frac{1 - \cos\varphi}{\alpha} \cdot \frac{1 + \cos\varphi}{\beta} \cdot \left(\frac{2b - a\cos\varphi}{\gamma}\right)^2,$$

on détermine les coefficients α, β, γ de façon que la somme des facteurs de v, pris à la première puissance, soit constante. Il suffit pour cela que

$$-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{a}{\gamma} = 0. \qquad (1)$$

Cette égalité étant vérifiée, v atteindra son maximum quand on aura

$$\frac{1 - \cos\varphi}{\alpha} = \frac{1 + \cos\varphi}{\beta} = \frac{2b - a\cos\varphi}{\gamma}. \qquad (2)$$

En éliminant α, β, γ entre (1) et (2), il vient

$$-\frac{1}{1 - \cos\varphi} + \frac{1}{1 + \cos\varphi} - \frac{2a}{2b - a\cos\varphi} = 0$$

$$2a\cos^2\varphi - 2b\cos\varphi - a = 0$$

d'où

$$\cos\varphi = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 2a^2}}{2a}.$$

Il faut prendre le signe —, car le signe + donne une valeur $> \frac{2b}{2a}$ ou > 1. L'autre valeur rend, du reste, positifs les facteurs du produit v. Donc la valeur de φ rendant le volume maximum est

$$\cos\varphi = \frac{b - \sqrt{b^2 + 2a^2}}{2a}.$$

L'angle φ est donc obtus. En posant $\varphi = 90° + \varphi'$, on a

$$\sin\varphi' = \frac{\sqrt{b^2 + 2a^2} - b}{2a}.$$

On construit aisément $\sqrt{b^2 + 2a^2}$ par des triangles rectangles, puis $\sqrt{b^2 + 2a^2} - b = l$. Alors φ' s'obtient par un triangle rectangle au moyen de $l = 2a\sin\varphi'$ et par suite φ.

Digitized by Google

NOTES MATHÉMATIQUES.

28. *Sur le théorème de Pythagore.* Nous empruntons aux *Unterrichtsblätter für Math. und Naturw.* XIV, p. 79, la démonstration suivante qui n'est qu'une variante d'une autre démonstration bien connue.

Soit ABC un triangle rectangle en A (le lecteur est prié de faire la figure ; pour plus de facilité le côté AB est horizontal). Construisons extérieurement les carrés BCDE, CAFG, ABHK. Les droites GC et BH se rencontrent en un point V, les droites GF et HK en un point U. La figure GVHU est le carré construit sur la somme $b + c$; elle se compose des carrés construits sur AB et AC et de quatre triangles égaux à ABC (en traçant la ligne FK). Menons aussi par E une parallèle à AC et par D une parallèle à AB ; ces droites se rencontrent en un point Y et coupent respectivement AB en X et AC en Z. On démontre facilement que les triangles XEB, EYD, CZD sont égaux à ABC ; il en résulte que la figure AXYZ est également un carré construit sur $b + c$ et se compose du carré construit sur BC et de quatre triangles égaux à ABC.

Par conséquent, si de chacun des carrés égaux AXYZ, UHVG on retranche les quatre triangles égaux à ABC, les restes sont égaux : donc $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

31. *Une proposition de Catalan.* J'ai rappelé dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* 1907 p. 258, la question suivante, demeurée non résolue depuis son insertion par E. Catalan dans le *J. de Math. Sp.* 1883, p. 240 : « m étant un nombre premier impair et P un polynome à coefficients entiers, l'équation

$$(a+b)^m - a^m - b^m = mab(a+b)P^2$$

n'est vérifiée que par $m = 7$, $P = a^2 + ab + b^2$. »

En voici une démonstration, due au Lt-Colonel Welsch : Si la proposition est vraie, elle doit se vérifier pour $a = b = 1$. Dans ce cas, on a

$$2^m - 2 = 2mF$$

et il s'agit de voir pour quelles valeurs de m, F est, ou non, un carré. Or,

$$mF = 2^{m-1} - 1 = \left(2^{\frac{m-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{m-1}{2}} + 1\right).$$

Digitized by Google

Pour que F soit un carré, il faut,

ou que $2^{\frac{m-1}{2}} - 1$ soit un carré, et $2^{\frac{m-1}{2}} + 1 \equiv 0 \pmod{m}$;

ou que $2^{\frac{m-1}{2}} + 1$ soit un carré, et $2^{\frac{m-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{m}$.

Les premières conditions ne sont réalisées que pour $m = 3$, les deuxièmes que pour $m = 7$. (H. BROCARD)

BIBLIOGRAPHIE.

Führer durch die mathematische Literatur mit besonderer Berücksichtigung der historish wichtigen Schriften von FELIX MÜLLER, Leipzig et Berlin, Teubner, 1909 (In-8°, cartonné de X-252 pp). Prix : 8 marcs.

Ce livre est surtout destiné aux étudiants qui veulent compléter les leçons reçues par des renseignements historiques et bibliographiques. Il ne pouvait avoir la prétention d'être une bibliographie mathématique complète; mais avec des dimensions plus modestes, il est plus propre à orienter rapidement le lecteur.

L'ouvrage se compose de trois parties. La première partie renseigne les grands ouvrages sur l'histoire des sciences, les œuvres complètes des grands mathématiciens, les éditions classiques, les journaux périodiques et les encyclopédies, les publications biographiques.

La seconde partie est relative à la philosophie, la pédagogie, l'algèbre, l'arithmétique élémentaire ou supérieure, l'analyse élémentaire ou supérieure.

La troisième partie comprend tout le domaine de la géométrie : géométrie élémentaire, descriptive, trigonométrie, analysis situs, topologie et cristallographie; géométrie analytique ou synthétique, géométrie infinitésimale, courbes et surfaces, géométrie énumérative, géométrie réglée, transformations, géométrie à plusieurs dimensions, géométrie cinématique.

Une table des matières et un index des noms terminent le livre.

Le Guide de M. F. Müller peut rendre de grands services à ceux qui veulent se mettre au courant de la littérature mathématique concernant une branche déterminée, un problème ou un théorème remarquables. Nous le recommandons volontiers aux professeurs et aux étudiants.

Un ouvrage de si longue haleine ne peut réaliser immédiatement l'idéal ; les erreurs et les lacunes sont pour ainsi dire inévitables. Par exemple, les ouvrages de Catalan (Nouvelle Correspondance Mathématique, Eléments de géométrie, Manuel des candidats à l'Ecole polytechnique, etc.,) méritaient une mention ; on n'a pas cité la géométrie de Meray dont il a été souvent question dans les derniers temps; la géométrie récente du triangle (et du tétraèdre) n'est pas une simple modification de terminologie (p. 146), et la bibliographie y relative présente des lacunes importantes (omission du Traité

Digitized by Google

de Géométrie de Rouché et de Comberousse, de la dissertation doctorale de Birckhan, etc.); le curvigraphe Lebeau aurait pu trouver place dans la géométrie cinématique. (J. N.)

Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkten des geradlinigen Dreiecks, und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren. Eine analytisch-trigonometrische Abhandlung von KARL WILHELM FEUERBACH, der Philosophie Doktor. Mit einer Vorrede von Karl Buzengeiger, ordentlichem Professor der Mathematik an der grossherzoglichem badischen Universität zu Freiburg. Zweite nichtgeänderte Ausgabe. Haarlem, P. Visser Azn 1908. (In-8° de XIII-78-VI pages avec 17 fig. dans le texte). Prix : 1 florin.

Les rédacteurs du *Wiskundig Tijdschrift* ont eu l'heureuse idée de faire réimprimer l'intéressant opuscule où parut pour la première fois, en 1822, la remarquable proposition, « plus souvent citée que démontrée » que le cercle des neuf points d'un triangle touche les quatre cercles tritangents. Le texte primitif a été reproduit fidèlement, sauf que les lettres gothiques ont été remplacées par des lettres françaises et que les figures ont été insérées dans le texte. Un appendice contient la bibliographie du cercle des neuf points.

L'opuscule renferme une foule de relations entre les éléments d'un triangle rectiligne. Aujourd'hui encore il peut être considéré comme l'un des meilleurs recueils de ces relations.

Nous recommandons volontiers cet ouvrage aux professeurs et aux élèves. (J. N.)

EMILE BOREL, Professor an der Sorbonne zu Paris. **Elemente der Mathematik,** I. Band : **Arithmetik und Algebra.** Vom Verfasser genehmigte Ausgabe, besorgt von P. STÄCKEL in Karlsruhe. Leipzig et Berlin, Teubner, 1908. (In-8° cartonné de XVI-432 pp. avec 57 figures et 3 planches.) Prix: 8 marcs 40.

Les manuels de M. Borel, conformes aux programmes officiels français de 1902 et 1905, sont destinés aux élèves de 3e 2e et 1re des sections C et D, où l'enseignement des mathématiques (Arithmétique, Algèbre, Géométrie et Trigonométrie) comprend cinq heures par semaine. Ces programmes se distinguent surtout des anciens par l'introduction des représentations graphiques et de la notion de *fonction*, innovation jugée au commencement par quelques-uns comme téméraire, mais justifiée complètement par le succès. Naturellement, il ne s'agit pas ici de présenter sous une forme abstraite les premiers éléments de géométrie analytique et de calcul infinitésimal ; au contraire, l'enseignement doit toujours garder une forme concrète. M. Borel s'est efforcé de faire ressortir la relation intime entre les formules algébriques et les faits de la vie réelle, tant dans les exemples et les exercices que dans les développements théoriques.

Les qualités des manuels de M. Borel ont déterminé M. Stäckel à les approprier à l'enseignement des établissements allemands, en réunissant dans un même volume : *Arithmétique et Notions d'Algèbre* (3e A), *Algèbre, premier cycle* et

Digitized by Google

Algèbre, second cycle, et en leur faisant subir quelques modifications (suppression de la *revision* de certaines parties ; rédaction plus concise de certains passages en arithmétique ; suppression de la notion de dérivée par passage à la limite ; changements de quelques énoncés, commandés par des différences entre les terminologies française et allemande ; remplacement des exemples empruntés à la vie française par des exemples analogues pris en Allemagne).

L'ouvrage est surtout destiné aux professeurs de mathématiques ; mais il peut également servir aux anciens élèves des humanités qui abordent l'étude des sciences naturelles, de la médecine ou des sciences techniques ; enfin les *non-mathématiciens* qui, arrivés déjà à un certain âge, éprouvent le besoin de revenir à la mathématique si longtemps négligée, avant de se mettre au courant des premières notions d'analyse infinitésimale, trouveront dans ce livre, sous une forme très claire, tous les développements désirables.

La réforme des programmes étant à l'ordre du jour en Belgique, nous ne pouvons que recommander à nos professeurs la lecture du manuel Borel-Stäckel. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 1659.

(Voir *Mathesis*, (3), VIII, p. 48).

Trouver les lieux des centres et des foyers des hyperboles équilatères tangentes à une conique donnée Σ *en un point fixe et en un second point variable.* (Abramescu)

Solution par M. J. Degueldre. Prenons, pour axes des x et des y, la tangente et la normale à la conique Σ au point de contact fixe. Cette conique peut être représentée par l'équation

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2y = 0. \qquad (1)$$

Une conique touchant Σ à l'origine et en un second point variable a une équation de la forme

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2y - \lambda(y - kx)^2 = 0,$$

λ, k étant des paramètres variables.

C'est une hyperbole équilatère si

$$\lambda = \frac{A + C}{1 + k^2}. \qquad (2)$$

Digitized by Google

Les coordonnées du centre vérifient les relations

$$By + Cx = -k\lambda(y - kx), \tag{3}$$

$$Ay + Bx + 1 = \lambda(y - kx). \tag{4}$$

Elles donnent par division

$$k = -\frac{By + Cx}{Ay + Bx + 1}.$$

Portons cette valeur dans (2) ; nous aurons

$$\lambda = \frac{(A + C)(Ay + Bx + 1)^2}{(Ay^2 + Bx + 1)^2 + (By + Cx)^2}.$$

Si, dans (4), on remplace k et λ par les valeurs trouvées, et qu'on supprime le facteur commun $Ay + Bx + 1$, on obtient pour l'équation du lieu des centres

$$(B^2 - AC)(x^2 + y^2) + 2Bx + (A - C)y + 1 = 0.$$

Ce lieu est un cercle ; cependant si la courbe Σ est une parabole, le lieu est une droite.

Lieu des foyers. Une hyperbole équilatère qui touche Σ à l'origine a pour équation focale

$$(1 - n^2)y^2 + 2mnxy + (1 - m^2)x^2 + 2(\beta + nt)y = 0, \tag{5}$$

les paramètres satisfaisant aux relations

$$\alpha^2 + \beta^2 - t^2 = 0, \quad \alpha + mt = 0, \quad m^2 + n^2 = 2. \tag{6}$$

En retranchant l'équation (1) multipliée par $\beta + nt$, de l'équation (5), on obtient

$$[(1 - n^2) - A(\beta + nt)]y^2 + 2[mn - B(\beta + nt)]xy + [(1 - n^2) - C(\beta + nt)]x^2 = 0.$$

Ce lieu, passant par l'intersection des deux coniques, représente les droites qui unissent l'origine aux deux autres points communs à ces courbes ; celles-ci étant tangentes, les deux droites sont confondues, ce qui exige

$$[mn - B(\beta + nt)]^2 - [(1 - n^2) - A(\beta + nt)][(1 - m^2) - C(\beta + nt)] = 0,$$

Digitized by Google

condition qu'on peut écrire en tenant compte de la relation $m^2 + n^2 = 2$:

$$1 + (B^2 - AC)(\beta + nt)^2 + (\beta + nt)[A(1 - m^2) + C(1 - n^2) - 2Bmn] = 0.$$

L'équation du lieu des foyers des hyperboles considérées s'obtient en éliminant m, n, t entre cette condition et les relations (6) ; ces dernières donnent :

$$t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad m = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad n = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

$$\beta + nt = \beta + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2}.$$

L'équation du lieu est donc

$$(\alpha^2 + \beta^2) + (B^2 - AC)(\alpha^2 + \beta^2)(\beta + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2})^2 +$$
$$(A - C)(\beta + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2})\beta^2 + 2B\alpha\sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2}(\beta + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta^2}) = 0.$$

En la rendant rationnelle, on obtient

$$(\alpha^2 + 2\beta^2)[2\beta(B^2 - AC)(\alpha^2 + \beta^2) + 2B\alpha\beta + (A - C)\beta^2]^2$$
$$= \{(\alpha^2 + \beta^2)[1 + (B^2 - AC)(\alpha^2 + 3\beta^2)] + 2B\alpha(\alpha^2 + 2\beta^2) + (A - C)\beta^3\}^2.$$

En groupant deux à deux les termes qui ne renferment pas $\alpha^2 - \beta^2$, on voit que cette expression est facteur commun de l'équation. Après sa suppression, l'équation peut s'écrire :

$$4(B^2 - AC)^2\alpha^2(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - 3\beta^2)\beta^2 - 4B^2\alpha^2(\alpha^2 - 3\beta^2) - (A - C)^2\beta^4$$
$$+ 4(B^2 - AC)[2B\alpha - (A - C)\beta]\beta^3 - (\alpha^2 + \beta^2)[1 - (B^2 - AC)(\alpha^2 - 3\beta^2)]^2$$
$$- 2[1 + (B^2 - AC)(\alpha^2 - 3\beta^2)][2B\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2) - (A - C)\beta^3] = 0.$$

Le lieu des foyers est donc une courbe du sixième ordre ; il devient une quartique si Σ est une parabole.

Solutions analogues par MM. [illegible] et [illegible].

Un seul correspondant a traité le cas des [illegible] ; il arrive à une quartique, ce qui est en désaccord avec la solution analytique.

Question 1674.

(Voir *Mathesis*, (3), VIII, 144).

Si les côtés correspondants de deux triangles ABC, A'B'C' *inscrits dans une conique se coupent en* A'', B'', C'' *et si l'on prend un point* O *sur cette conique, les points* $A_0 \equiv OA'.BC$, $B_0 \equiv OB'.AC$, $C_0 \equiv OC'.AB$ *et les points* A'', B'', C'' *seront situés sur une même conique.* (P. DE LEPINEY).

Solution par G. VERHEUGEN. Prenons ABC comme triangle fondamental. L'équation de la conique ABCA'B'C' est alors

$$f\mathrm{RQ} + g\mathrm{PR} + h\mathrm{PQ} = 0.$$

Soient a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' les coordonnées des sommets du triangle A''B''C'', et $y, y'\ y''$ les coordonnées du point O. On aura

$$fa'a'' + gaa'' + haa' = 0, \quad fbb' + gbb'' + hbb' = 0.$$

D'où l'on déduit :

$$\frac{f}{ab(a''b' - a'b'')} = \frac{g}{a'b'(ab'' - a''b)} = \frac{h}{a''b''(a'b - ab')}.$$

Ces relations permettent d'écrire l'équation de la droite A'B' comme il suit :

$$\mathrm{A'B'} \equiv \frac{f\mathrm{P}}{ab} + \frac{g\mathrm{Q}}{a'b'} + \frac{h\mathrm{R}}{a''b''} = 0.$$

Par analogie, on a :

$$\mathrm{A'C'} \equiv \frac{f\mathrm{P}}{ac} + \frac{g\mathrm{Q}}{a'c'} + \frac{h\mathrm{R}}{a''c''} = 0, \quad \mathrm{B'C'} \equiv \frac{f\mathrm{P}}{bc} + \frac{g\mathrm{Q}}{b'c'} + \frac{h\mathrm{R}}{b''c''} = 0.$$

$$\mathrm{OA'} \equiv \frac{f\mathrm{P}}{ay} + \frac{g\mathrm{Q}}{a'y'} + \frac{h\mathrm{R}}{a''y''} = 0, \text{ etc.}$$

On aura donc comme coordonnées des points A'', B'', C'', A_0, B_0, C_0 respectivement :

$$\left(0, \frac{b'c'}{g}, -\frac{b''c''}{h}\right), \quad \left(-\frac{ac}{f}, 0, \frac{a''c''}{h}\right), \quad \left(\frac{ab}{f}, -\frac{a'b'}{g}, 0\right);$$

$$\left(0, \frac{a'y'}{g}, -\frac{a''y''}{h}\right), \quad \left(-\frac{by}{f}, 0, \frac{b''y''}{h}\right), \quad \left(\frac{cy}{f}, -\frac{c'y'}{g}, 0\right).$$

Digitized by Google

Considérons l'hexagone $A''A_0B''B_0C''C_0$; soient L l'intersection de $A''A_0$ et B_0C'', M celle de A_0B'' et $C''C_0$ et N celle de $B''B_0$ et C_0A''. Si L, M et N sont en ligne droite, les sommets de cet hexagone se trouveront sur une même conique.

L'équation de B_0C'' est

$$\frac{fP}{aby}+\frac{gQ}{a'b'y}+\frac{hR}{ab''y''}=0;$$

$A''A_0$ ayant pour équation $P=0$, les coordonnées de L seront :

$$0,\ a'b'y : g,\ -ab''y'' : h.$$

Par analogie, les coordonnées de M seront :

$$acy'' : f,\ -a'c''y' : g,\ 0;$$

et celles de N :

$$-b'cy : f,\ 0,\ b''c''y' : h.$$

Pour que L, N et M soient en ligne droite, il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} 0 & a'b'y : g & -ab''y'' : h \\ acy'' : f & -a'c''y' : g & 0 \\ -b'cy : f & 0 & b''c''y' : h \end{vmatrix} = 0.$$

ou, en simplifiant,

$$\begin{vmatrix} 0 & b'y & -ay'' \\ ay'' & -c''y' & 0 \\ -b'y & 0 & c''y' \end{vmatrix} = 0.$$

Le dernier déterminant étant identiquement nul, la propriété est démontrée.

×Question 1678.

(Voir *Mathesis*, (3), VIII, p. 176).

Soient O, I, I', I'', I''' *les centres des cercles circonscrit, inscrit et ex-inscrits au triangle* ABC, *et soient* (D, E, F), (D', E', F'),. . *les points de contact des côtés* BC, CA, AB *avec les cercles* I, I',....

Si la droite AD *passe par le point de Lemoine, on a les propriétés suivantes :*

1° $$a=\frac{b^2+c^2}{b+c}=(b+c)\cos A,\ \frac{b-a}{a-c}=\frac{c}{b}.$$

Digitized by Google

$$\frac{p}{b^2+bc+c^2}=\frac{p-a}{bc}=\frac{p-b}{c^2}=\frac{p-c}{b^2}$$

$$(p-a)^2=(p-b)(p-c),\ r'^2=r''\,r'''.$$

2° *Les droites* OI, EF, E'''F'' *et la tangente en* A *au cercle* O *se coupent sur* BC.

3° *La droite* EF *passe au milieu de la bissectrice intérieure de l'angle* A, *et la droite* F'''E'' *au milieu de l'isotomique de cette bissectrice (anti-bissectrice) ; le symétrique de* I' *par rapport au milieu du côté* BC *est situé sur la droite* I''I'''.

4° *Le point de Gergonne et le point de Nagel (intersection de* BE *avec* CF, *de* BE'' *avec* CF''') *sont sur une même parallèle à* BC.

Solution par MM. VERHEUGEN, DELAHAYE *et* (partim) PLAKHOVO.

1° On a : $CD=p-c$, $BD=p-b$; donc si AD est la symédiane,

$$\frac{p-c}{p-b}=\frac{b^2}{c^2}.$$

Cette proportion donne

$$\frac{p-b}{c^2}=\frac{p-c}{b^2}=\frac{(p-b)+(p-c)}{c^2+b^2}=\frac{(p-b)-(p-c)}{c^2-b^2},$$

ou

$$\frac{p-b}{c^2}=\frac{p-c}{b^2}=\frac{a}{c^2+b^2}=\frac{1}{b+c}.$$

On a donc

$$a=\frac{b^2+c^2}{b+c}.$$

Cette égalité peut s'écrire $ab+ac=b^2+c^2$; on en tire

$$\frac{b-a}{a-c}=\frac{c}{b}=\frac{(b-a)+c}{(a-c)+b}=\frac{c-(b-a)}{b-(a-c)},$$

ou

$$\frac{b-a}{a-c}=\frac{c}{b}=\frac{p-a}{p-c}=\frac{p-b}{p-a}. \qquad (1)$$

Par conséquent, comme $S=(p-a)\,r'=(p-b)\,r''=(p-c)\,r'''$, on a : $(p-a)^2=(p-b)(p-c),\ r'^2=r''\,r'''$.

De (1) on déduit encore

$$\frac{p-a}{c}=\frac{p-c}{b},\ \frac{p-a}{b}=\frac{p-b}{c},$$

$$\frac{p-a}{bc}=\frac{p-c}{b^2}=\frac{p-b}{c^2}=\frac{p}{bc+b^2+c^2}=\frac{1}{b+c}.$$

Digitized by Google

Enfin

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a(b+c)-a^2}{2bc} = \frac{a(p-a)}{bc} = \frac{a}{b+c}.$$

2° La tangente en A au cercle O passe au conjugué harmonique L du pied D de la symédiane AD par rapport à B et C. Les droites AD, BE, CF étant concourantes, la droite EF passe également par le conjugué harmonique L de D par rapport à B et C. On a, pour ce point,

$$\frac{LB}{LC} = \frac{p-b}{p-c} = \frac{c^2}{b^2}.$$

La droite E'''F'' rencontre BC en un point L' donné par

$$\frac{L'B}{L'C}\cdot\frac{E'''C}{E'''A}\cdot\frac{F''A}{F''B} = 1.$$

Comme $E'''C = F''B = p$, $E'''A = p-b$, $F''A = p-c$, on voit que L' coïncide avec L.

La symédiane AD est la polaire de L par rapport au cercle O; donc elle est perpendiculaire à la droite OI.

La droite AD est aussi la polaire de L par rapport au cercle I; car elle passe par le point de contact de la tangente LD et par le point de concours des tangentes menées aux extrémités de la corde EF passant par L. Donc AD est perpendiculaire à LI; il en résulte que LI et LO coïncident.

3° Soient α le pied de la bissectrice AI et α' l'isotomique de α. On a

$$\frac{AF}{FB} = \frac{p-a}{p-b} = \frac{b}{c} = \frac{C\alpha}{\alpha B};$$

donc Fα est parallèle à AC. Par analogie, Eα est parallèle à AB; par suite, EF passe au milieu de Aα.

On démontre de même que F'''E'' passe au milieu de Aα'.

Appelons M le milieu du côté BC et N le point de rencontre des droites I'M et I''I'''. En considérant les rayons I'D', I''D'', I'''D''', on trouve

$$I'C' : CI'' = r' : r'', \quad I'B : I'''D''' = r' : r''',$$

d'où, à cause de $r'^2 = r''r'''$,

$$I'C : CI'' = I'''B : BI''.$$

On en conclut que la parallèle à I'I'' par B et la parallèle à I'I'''

Digitized by Google

rencontrent I'''I'' au même point qui est le symétrique de I' par rapport à M.

4° Les coordonnées barycentriques du point de Gergonne sont proportionnelles à $\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c}$ ou à $\frac{1}{bc}, \frac{1}{c^2}, \frac{1}{b^2}$ ou encore à bc, b^2, c^2; par suite, la première coordonnée absolue de ce point est $bc : (bc + b^2 + c^2)$.

Le point de Nagel a ses coordonnées barycentriques proportionnelles à $p-a$, $p-b$, $p-c$ ou à bc, c^2, b^2; donc sa première coordonnée absolue est encore $bc : (b^2 + bc + c^2)$.

Autre solution par M. DE LEPINEY qui fait les remarques suivantes :
1° On a les relations

$$4Rr' = b^2 + c^2, \quad \overline{II'}^2 : II''.II''' = a : \sqrt{bc}.$$

2° De la proportion $p-a : p-b = p-c : p-a$ on conclut que les droites E'''F et F'''E sont parallèles entre elles et que les droites FE'' et EF''' sont parallèles à BC; par suite EF et E''F'' se coupent sur la médiane AM.

×Question 1689.

(Voir *Mathesis*, (3), VIII, p. 200).

Si a, b, c, d, e sont positifs, on a

$$\left(\frac{abc}{de}\right)^4 + \left(\frac{bcd}{ea}\right)^4 + \left(\frac{cde}{ab}\right)^4 + \left(\frac{dea}{bc}\right)^4 + \left(\frac{eab}{cd}\right)^4 > ab^2c + bc^2d + cd^2e + de^2a + ea^2b$$

(W. GREENSTREET).

Solution par M. R. DU TRIEU DE TERDONCK. Posons

$$\frac{abc}{de} = \alpha, \frac{bcd}{ea} = \beta, \frac{cde}{ab} = \gamma, \frac{dea}{bc} = \delta, \frac{eab}{cd} = \varepsilon;$$

nous aurons

$$\alpha\gamma = c^2, \beta\delta = d^2, \alpha\delta = a^2, \gamma\varepsilon = e^2, \beta\varepsilon = b^2.$$

Le double du premier membre de l'inégalité proposée pourra s'écrire

$$(\alpha^2 - \gamma^2)^2 + (\beta^2 - \delta^2)^2 + (\gamma^2 - \delta^2)^2 + (\beta^2 - \varepsilon^2)^2 + (\gamma^2 - \varepsilon^2)^2 + 2(c^4 + d^4 + a^4 + b^4 + e^4).$$

La dernière ligne est égale à

$$(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + (d^2 - e^2)^2 + (e^2 - a^2)^2 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2d^2 + 2d^2e^2 + 2e^2a^2 \quad (1)$$

Digitized by Google

La partie (1) revient à

$$(ab-bc)^2+(bc-cd)^2+(cd-de)^2+(ea-ab)^2 \\ +2ab^2c+2bc^2d+2cd^2e+2ea^2b.$$

Donc le double du premier membre de l'inégalité proposée est une somme de carrés plus le double du second membre; ce qui démontre la question.

Si quelques-uns des nombres a, b, c, d, e étaient négatifs, l'inégalité aurait lieu à plus forte raison.

Question 1683.

(Voir *Mathesis*, (3), VIII, p. 200).

Déterminer une courbe (c) *telle que la portion de la tangente comprise entre le point de contact* M *et le point* N *où cette tangente coupe une droite donnée d, soit vue d'un point fixe* O *sous un angle constant* α. *Application à* $\alpha = 90°$. (Abramescu)

Solution par M. P. de Lepiney. Prenons pour axe des x la droite d et pour axe des y la perpendiculaire abaissée de O sur d. Les points O, M et N auront respectivement pour coordonnées $(0, d)$; (x, y); $\left(x-y\frac{dx}{dy}, 0\right)$. Les équations de OM et ON seront donc

$$(y-a)\,X-xY+ax=0,$$

$$aX+\left(x-y\frac{dx}{dy}\right)Y-a\left(x-y\frac{ax}{dy}\right)=0,$$

d'où

$$K=\operatorname{tg}\alpha=\left[\left(x-y\frac{dx}{dy}\right)(y-a)+ax\right]:\left[a(y-a)+x\left(y\frac{dx}{dy}-x\right)\right]$$

ce qui donne pour équation différentielle de (c) :

$$(Kxy+y^2-ay)\,dx=[xy+K(x^2+a^2-ay]\,dy$$

Posons $$z=\frac{x}{y-a},\quad v=\frac{1}{y-a},$$

l'équation précédente se transforme en

$$\frac{Kz+1}{K(z^2+1)}\,dz=\frac{a\,dv}{av+1}.$$

L'équation intégrale correspondante est donc :

$$\lg\left(v+\frac{1}{d}\right)=\lg\sqrt{z^2+1}+\frac{1}{K}\operatorname{artg}(z^2+1)$$

( )

Digitized by Google

ou

$$l\frac{Cy}{\sqrt{x^2+(y-a)^2}} = \frac{1}{K}\operatorname{artg}\left[\frac{x^2}{(y-a)^2}+1\right]$$

Pour $K = \infty$, on obtient la conique

$$Cy^2 = x^2 + (y-a)^2,$$

comme on pouvait s'y attendre d'après une propriété focale connue des courbes du 2d degré.

De bonnes solutions de la même question nous ont été adressées par MM. Verheugen et Van Dinter, qui intègrent l'équation différentielle en posant $y = zx$, O étant l'origine des coordonnées.

QUESTIONS D'EXAMEN.

×**1409**. Si une parallèle à la médiane AM d'un triangle ABC rencontre les côtés BC, CA, AB en A′, B′, C′, les triangles A′BB′ et A′CC′, ABB′ et ACC′ sont équivalents. (J Degueldre)

Si l'on remplace AM par une droite quelconque menée par A, on a A′BB′ : A′CC′ = ABB′ : ACC′ = MB : MC.

1410. On projette un point quelconque d'une circonférence O en P et Q sur deux diamètres rectangulaires fixes Ox, Oy ; démontrer que la droite PQ et les parallèles au rayon OM menées par P et Q enveloppent une même hypocycloïde à quatre rebroussements

(E. N. Barisien)

En effet, les segments interceptés sur ces droites entre Ox et Oy sont égaux à OM.

1411. Une ellipse étant rapportée à ses axes, la perpendiculaire abaissée du pied de l'ordonnée d'un point M de la courbe sur la tangente est normale à une ellipse fixe. (E. N. Barisien)

Si les coordonnées de M sont $a\cos\varphi$, $b\cos\varphi$, l'équation de cette droite est $ax\sin\varphi - by\cos\varphi = a\sin\varphi\cos\varphi$; elle a la même forme que l'équation d'une normale.

×**1412**. Soient AOB un diamètre d'un cercle, OC le rayon perpendiculaire et D le milieu de OB. Du point D comme centre avec DC pour rayon décrivez un arc de cercle qui coupe AO en E ; EO sera le côté du décagone régulier et EC celui du pentagone.

Digitized by Google

[illegible]

1696. [illegible] paraboles [illegible] et de paramètres [illegible] [illegible] communs soient sur un même [illegible] perpendiculaires [illegible] [illegible] [illegible].

[illegible]

1697. [illegible] le triangle ABC [illegible] on donne la bissectrice $AA' = x$, le segment $A'B = a$ [illegible] sur le côté $AC = b$.

Le problème n'est pas [illegible] par l'emploi de courbes [illegible].

1698. Soient x, y, z les distances du premier point de Brocard Ω aux sommets du triangle ABC; démontrer que l'excentricité de l'ellipse de Brocard a pour expression

$$\frac{\sqrt{x^2-y^2-2xy\cos(B-C)}}{b}$$ (Gallatly).

1699. Trois droites rectangulaires deux à deux se coupent en un même point O. On porte sur la première de ces lignes les longueurs $OA = OA' = a$, sur la seconde les longueurs $OB = OB' = b$, sur la troisième les longueurs $OC = OC' = c$. En joignant les points ainsi obtenus par des droites, on obtient les arêtes d'un octaèdre CABA'B'C'. Par un point I de l'arête CB' on mène un plan π, parallèle à la face A'BC' et qui coupe les faces de l'octaèdre suivant un hexagone H.

Étant donné $CI = x$, $IB' = y$, trouver la surface de l'hexagone H et le rapport dans lequel le plan π partage le volume de l'octaèdre. Chercher le maximum de la surface de l'hexagone.

1700. Montrer que les quatre équations en x

$$a\sin x + b\sin(x+\theta) = a\sin\theta,$$
$$a\cos x + b\cos(x+\theta) = a\cos\theta + b,$$
$$a\sin(\theta - x) - b\sin x = b\sin\theta,$$
$$a\cos(\theta - x) + b\cos x = a + b\cos\theta.$$

ont une solution commune, et la calculer. (E. N. Barisien)

Digitized by Google

TABLE DES MATIERES(*).

ARITHMÉTIQUE, ANALYSE INDÉTERMINÉE.

	Pages.
×Note arithmétique, par M. Barisien	14
×Curiosités arithmétiques, par M. Barisien	16, 88
×Question d'arithmologie, par M. Barisien	89
×Quelques grands nombres, par M. Terloo	60
×Sur la somme des puissances semblables des n premiers nombres, par M. Barisien	95
Somme des chiffres de tous les nombres consécutifs formés de n chiffres, par M. Barisien.	128
Sur les combinaisons (Malaise)	130
Equations indéterminées, par M. Barisien	161
×Question d'arithmologie, par MM. Barisien et J. Neuberg	219
Sur le dernier théorème de Fermat (J. N.)	243
×Question 1641 ; solution par MM. Abramescu, Rose, etc.	68

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

Applications des déterminants, d'après Cwojdzenski	11
Résolution de l'équation du troisième degré, etc., par M. E. N. Barisien	113
Sur une identité algébrique	181
Sur le théorème des deux moyennes, par M. A. Aubry.	206
Une proposition de Catalan, d'après M. Welsch	267
×Question 1622 ; solutions par MM. Plackhovo, Rose, etc.	99
×Question 1648 ; solution par M. Abramescu	106
×Question 1658 ; solutions par MM. Agronomof, etc.	141
Question 1629 ; solution par MM. Verheugen, Abramescu	167
×Question 1499 ; solution par M. Neuberg	191
×Question 1662 ; solutions par MM. Barisien, Constantinescu	195
Question 1611 ; solution par M. Barisien	216
×Question 1676 ; solution par MM. Dalle, Rose, etc.	223
×Question 1677 ; solution par MM. Salkin, Rose, etc.	229
×Question 1682 ; solution M. du Trieu de Terdonck.	277
Question de concours (1903), par M. Rose.	262, 265

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE ;

Un théorème de Pappus	13
Formules relatives aux cercles tritangents (J. N.).	14
Sur le cercle des neuf points, par M. W. Gallatly	83
Géométrie du triangle, d'après M. Teodorescu	89
Note sur les triangles, par M. Constantinescu	49
Cinq problèmes de géométrie sur le terrain, par M. A. Aubry	55, 144
Formules pour la mesure des surfaces et des volumes, etc., par M. l'abbé E. Gelin	Supplément I 1-16
Théorèmes sur la géométrie récente du triangle, par MM. C. Capello. J. Neuberg.	84, 85

(*) Pour les rectifications, voir pp. 80, 144, 176, 188, 200, 247. De plus, p. 191, l. 1, lire 1499 au lieu de 1498, et dans le supplément de décembre, *Gauss contre Kant*, page 14, lignes 19, 20, échanger entre eux cos xy et ch xy.

Ce qui est marqué d'une croix peut être compris au moyen des mathématiques élémentaires.

Digitized by Google

Pages.
Sur le quadrangle complet (J. N.) 129
Extension d'un théorème connu, par MM. Piccioli et Neuberg 131
Démonstration fonctionnelle du théorème de Pythagore; autre démonstration 182, 267
Sur la droite d'Euler d'un triangle, par M. J. Neuberg 233
Question 1633; solutions par MM. Lez, Hacken, etc. 23
Question 1627; solutions par MM. Lez, Hacken, etc. 40
Question 1649; solution par M. Verheugen 73
Question 1650; solution par M. Rose 74
Question 1630; solution par M. Hacken 101
Question 1647; solutions par MM. Lez, Rose, etc. 105
Question 1655; solution par MM. Lez et Delahaye 138
Question 1660; solution par MM. Agronomof, Lez, etc. 173
Question 1665; solution par M. Dalle 225
Question 1673; solution par M. Verheugen 252
Question 1678; solution par MM. Verheugen, Delahaye, etc. 275
Question de concours (1903), par M. Rose 263

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Tracé de la parabole, d'après M. Caronnet 39
Sur une transformation géométrique (J. N.) 61
Sur le rabattement des plans dans la perspective, par M. A. Claeys . . 145
Relations entre deux triangles pédals, par M. J. Neuberg 148
Théorèmes; par M. V. Retali 158
Sur un théorème de M'Kensie et sa généralisation, par MM. J. Neuberg, Juhel-Renoy, etc. 159, 257
Intersection de deux paraboles, par E. N. Barisien 161
Application de la théorie des figures inverses (J. N.) 181
Sur le théorème de Feuerbach, par M. J. Neuberg. 201
Sur un cas particulier du théorème de Pascal (J. N.) 217
Question 1635; solution par M. Constantinescu. 43
Question 1638; solutions par MM. Retali, Abramescu, etc. 44
Question 1612; solution par MM. Aenden Boom et Abramescu. 69
Question 1507; solution par M. Verheugen 98
Question 1643; solutions par MM. Delahaye et Lez 103
Question 1652; solution par MM. Degueldre, Rose, etc. 106
Question 1564; solution par M. J. Neuberg 132
Question 1654; solution par MM. Lez, Rose, etc. 137
Question 1657; solution par M. Degueldre 140
Question 1624; solutions par MM. Liénard, de Lepiney, etc. 161
Question 1644; solution par MM. Van Dinter et Degueldre 169
Question 1651; solution par MM. Lez, Dalle, etc. 193
Question 1676; solution par M. de Lepiney 254
Question 1674; solution par M. Verheugen 273
Question de concours (1903); solution par MM. Listray, Rose, etc. . . . 259

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR; COURBES ET SURFACES TRANSCENDANTES; COMPLEXES.

Sur l'aire d'une certaine quartique, par M. E. N. Barisien 211
Points de rebroussement de la développée d'une ellipse, par M. E. Barisien 218
Question 1416; solution par M. Liénard 96
Question 1653; solutions par MM. Lez, Degueldre, etc. 103
Question 1646; solutions par MM. Verheugen et Baidaf 134
Question 1107; solution par M. Barisien 188
Question 1087; solution par M. J. Neuberg 219
Question 1661; solution par M. de Lepiney 221

Digitized by Google

Pages.
Question 1633 ; solution par MM. Abramescu, Boutin, etc. 232
Question 1672 ; solutions par MM. Retali et de Lepiney 247
Question 1659 ; solution par M Degueldre 270
Question 1683 ; solution par M. de Lepiney 278

CALCUL DIFFÉRENTIEL ; CALCUL INTÉGRAL ; SÉRIES.

Sur le mouvement d'un point pesant à la surface de la terre, par M. C. Wasteels 5
Nouvelle logarithmotechnie, par M. A. Aubry. 55
Démonstration de la formule de Maskelyne, par M. Terlop. 59
Sur les surfaces parallèles, par M. C. E. Wasteels 81
Questions d'analyse, par M. J. Rose 177
Question 1437 ; solution par M. E. Cesàro 21
Question 1603 ; solution par M. Abramescu 21
Question 1631 ; solution par MM. Abramescu, Dupont, e.c. 23
Question 1636 ; solutions par MM. Verheugen, F. G. M., etc. 24
Question 1637 ; solutions par MM. Verheugen, F. G. M., etc. 23
Question 1639 ; solutions par MM. Retali, Rose, etc. 45
Question 1645, solution par M. Rose 71
Question 1634 ; solution par M. Dupont. 102
Question 1667 ; solution par M. Retali. 227

HISTOIRE ; BIBLIOGRAPHIE ; VARIÉTÉS.

Annuaire du Bureau des longitudes pour 1908 et 1909. . . . . 20, 247
R. Ball. Récréations et problèmes mathématiques, t. I (B. Lefebvre, S. J.). 37
P. Barbarin. La géométrie non euclidienne 122
Baudoin Dessins géométriques (J. N.) 63
E. Blaschke. Mathematische Statistik 19
R. Bonola. Die Nichteuclidische Geometrie (P. M.) 123
E. Borel-P. Stäckel. Arithmetik und Algebra. 269
C. Bourlet. Eléments et abrégé de Géométrie (J. N.) 63
U. Broggi. Assurances sur la vie 19
H. Bruns. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre . . 19
M. Cantor. Geschichte der Mathematik, B. IV. (H. B.) 214
E. Czuber. Vorlesungen über Differential und Integralrechnung . . . 186
E. Dumont. Trigonométrie (P. M.) 120
G. Fazzari. Breve Storia della Matematica 158
K. W. Feuerbach. Merkwürdige Punkte des Dreiecks. 269
F. G. M. Exercices de Géométrie (J. N.) 152
E. Gelin. Formules pour les surfaces et les volumes 20
H. Grassmann. Abhandlungen zur Geometrie und Analysis 184
A. Gravelaar. Rekenkunde (H. Bosmans, S. J.) 65
A. Gravelaar, Planimetrie (H. Bosmans, S. J.). 67
F. R. Helmert. Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kl. Quadrate 19
Ch. Hermite. Œuvres. Tome II 244
E. Jahnke. Vektorenrechnung (C. E. W.) 119
L. Lecornu. Dynamique appliquée. 246
G. Loria. Darstellende Geometrie (A. C.) 214
R. de Montessus. Calcul des probabilités 245
F. Müller. Führer durch die mathematische Literatur 268
M. d'Ocagne. Calcul graphique et Nomographie (F. W.) 124
K. Schwering. Handbuch der Elementar mathematik für Lehrer . . . 185
M. Simon. Didaktik und Methodik des Rechnens und der Mathematik . 90
M. Stuyvaert. Les nombres positifs (P. M.). 17

Digitized by Google

Pages.

M. Stuyvaert. Cinq études de géométrie analytique (C. S.) 92
J. J. Sylvester. The Collected Mathematical Papers (P. M.) 245
G. Teixeira. Courbes spéciales remarquables 118
J. Vandervennet. Vlakke meetkunde (P. M.) 123
J. Verneri. De triangulis sphaericis libri quatuor 151
H. Weber et J. Wellstein. Angewandte Elementar-Mathematik. . . 122
P. Worms de Romilly. Sur les premiers principes des sciences mathématiques (P. M.) 156
Albert Dürer, précurseur de Monge 63
Calcul de π; par MM. Quint et P. Mansion 126, 236

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions d'examen, 1370 à 1372, 1373 à 1379, 1380 à 1384, 1385 à 1389, 1390 à 1395, 1396 à 1397, 1398 à 1403, 1404 à 1407, 1408, 1409.
page 31, 47, 78, 111, 143, 175, 198, 230, 256, 279.

École militaire de Belgique Questions de concours. 77
École polytechnique de Paris. Concours d'admission en 1908 197
Concours de l'enseignement moyen en Belgique (1908) 259

SUPPLÉMENTS (43 pages).

1. (Février). E. Gelin. Formules pour la mesure des surfaces et des volumes, etc. . . . . Supplément I, pp. 1-16
2. (Juillet-août). J. Neuberg Sur deux complexes rectilignes du quatrième degré . . . . . Supplément II, pp. 1-10
3. (Décembre). P. Mansion. Gauss contre Kant sur la géométrie non euclidienne . . . . . Supplément III, pp. 1-16

QUESTIONS.

Questions des deux premières séries résolues et non publiées.

353, 835 (XI-XX) 892bis, 973, 1057, 1101, 1246, 1271, 1275

Questions non résolues des deux premières séries.

(I-X) 513, 598 (XI XX) 905, 953, 1046, 1079, 1123, 1144, 1220, 1225, 1228, 1233, 1240, 1247.

Questions résolues.

1087	posée (2) VI, p. 216	résolue p. 219
1107	posée (2) VII, p. 51	résolue p. 188

Questions résolues et non résolues des tomes I à VIII de la troisième série.

R = Résolue ; NR = Non Résolue.

Tome I.

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
1335	215	R	1338	240	NR

Tome II.

1371	128	NR	1378	184	NR
1374	152	NR			

Tome III.

1416	104	96	×1447	280	NR
1429	184	NR	1448	280	NR

Digitized by Google

Tome IV.

	POSÉE	RÉSOLUE		POSÉE	RÉSOLUE
1451	32	NR	×1499	280	191
1467	101	21	1500	280	R
1498	280	NR			

TOME V.

1507	56	98	×1525	144	NR
1508	56	R	1546	280	NR
1512	83	NR	1547	280	NR

TOME VI.

1557	55	NR	×1586	232	R
1564	88	132	1592	255	NR

TOME VII.

1602	32	21	1637	232	28
1611	88	216	1638	232	44
×1618	112	R	1639	232	45
×1622	144	99	×1641	256	68
1624	144	161	1642	256	69
×1627	168	40	×1643	256	103
1629	168	167	1644	256	169
1630	168	101	1645	256	71
×1631	200	23	1646	279	134
1633	200	23	×1647	280	105
×1634	200	102	×1648	280	106
1635	200	42	×1649	280	73
1636	232	25	×1650	280	74

TOME VIII.

1651	32	NR	1676	175	255
1652	32	106	×1677	175	229
1653	32	108	×1678	176	274
1654	32	137	1679	176	R
1655	32	138	1680	176	R
1656	48	R	1681	200	R
1657	48	140	×1682	200	277
×1658	48	141	1683	200	278
1659	48	270	1684	200	R
×1660	48	173	×1685	200	R
1661	79	193, 291	1686	231	R
×1662	79	195	1687	231	NR
1663	79	222	×1688	232	R
1664	79	R	×1689	232	R
×1665	80	225	1690	232	R
1666	112	NR	1691	256	R
1667	112	227	1692	256	NR
1668	112	R	×1693	256	R
×1669	112	NR	1694	256	R
×1670	112	219	×1695	256	R
×1671	143	NR	1696	280	NR
1672	144	247	1697	280	NR
×1673	144	252	1698	280	NR
1674	144	273	1699	280	NR
1675	144	R	1700	280	NR

Digitized by Google

TABLE DES NOMS

Abel, 18.
Abramescu, 21, 23, 24, 41, 42, 45, 48, 68, 69, 72, 74, 98, 102, 104, 106, 108, 126, 131, 141, 167, 171, 200, 223, 231, 270, 278.
Adrien Antonisz, 127, 239.
Aen den Boom, 69, 72, 176.
Agronomof, 24-101, 102, 105, 141, 173.
Ahmès, 236.
Albategnius, 155.
Al-Quouhi, 206.
Amodeo, 63.
Anthor, 88.
Apollonius, 40, 154, 170.
Archimède, 25, 28, 38, 206, 238.
Aryabhatta, 127, 239.
Aubert, 154, 159, 257.
Aubry, 54, 206.

Baidaf, 21, 24, 23, 45, 46, 68, 71, 74, 105, 106, 136.
Baltzer, 18.
Bar, 72, 106.
Barbarin, 122, 158.
Barisien, 14, 16, 23, 32, 39, 41, 47, 48, 68, 79, 88, 96, 104, 106, 108, 111, 112, 113, 128, 137, 144, 161, 173, 175, 188, 191, 194, 195, 199, 211, 217, 218, 219, 221, 222, 224, 227, 228, 229, 230, 231, 235, 256, 270, 279, 280.
Bateman, 130.
Baudoin, 64.
Baumeister, 90.
Bellavitis, 156.
Beltrami, 156.
Bernès, 208.
Bertrand (J), 66.
Bigourdin, 20, 247.
Birkhan, 269.
Bjormbo, 154.
Blachke, 19.
Bobynin, 208.
Boland, 108, 187, 188.
Bonola, 123, 158.
Borel, 64, 269.
Borelli, 206.
Boris, 47.
Bosmans (H), 66, 67, 214, 241.
Bourget, 208.
Bourlet, 63, 64.
Boutin, 228.
Braunmühl (von), 208.
Bremiker, 122.
Briggs, 122,
Brocard, 80, 153, 225, 267.
Broggi, 19.
Bruns, 19.
Buzenzeiger, 269.

Candido, 31, 47.
Cantor (M), 212, 239.
Capello, 84.
Cardan, 113, 207.
Carnot, 52.
Caronnet, 39.
Casier, 228.
Catalan, 267, 268.
Cavalieri, 31.
Cauchy, 19, 185, 208.
Cayley, 119.
Cesàro (E.), 21.
Chasles, 18, 118, 185, 270.
Christman, 155.
Chuquet, 37.
Cikot, 233.
Clausen, 128, 238.
Claeys, 71, 145, 215.
Clavius, 11.
Commandin, 14.
Constantinescu, 21, 40, 42, 49, 69, 74, 105, 106, 142, 196.
Cwojdzinski, 11.
Czuber, 186.

Dalle, 31, 105, 106, 194, 223, 225, 228.
Dase, 128, 238.
Dauge, 18.
Dedekind, 17.
Degueldre, 71, 74, 80, 105, 106, 107, 109, 112, 137, 140, 142, 171, 173, 223, 228, 270, 279.
Dehn, 123.
Delahaye, 74, 104, 225, 228, 254, 255.
Delsol, 156.
Déprez, 62.
Descartes, 118.
De Tilly, 64, 122, 156.
Diophante, 38.
Dobrotescu, 99.
Drosescu, 105, 106.
Dumont, 120.
Dupont (Fr.), 21, 23, 102.
Du Trieu de Terdonck, 277.
Dürer, 63.

Digitized by Google

Ebden, 32, 138.
Euclide, 14, 67, 206.
Euler, 34, 38, 233.
Eutocius, 206.

Fazzari, 158.
Fermat, 17, 38, 46, 207, 243.
Feuerbach, 201, 269.
F. G. M., 30, 152.
Fischbach (de), 236.
Fitz-Patrick, 237.
Francke, 154.

Galatly, 33, 280.
Gauss, 66.
Gelin, 20, 80, suppl. 1.
Gerard (Gustave), 169.
Gerard (L.), 158.
Gergonne, 154, 274.
Gob, 85, 96, 161, 166.
Godt, 33, 203.
Grassmann, 49, 119, 184.
Gravelaar, 65, 67.
Greenstreet, 143, 175, 200, 254, 277.
Günther, 212.
Guyou, 20.

Hacken, 24, 25, 40, 101, 259.
Hagge, 15.
Hain, 87.
Hamilton, 185.
Hartmann, 155.
Helmert, 19.
Hermite, 18, 244.
Hertz, 158.
Hervey, 36.
Hilbert, 156.
Hirst, 181.
Houel, 18.

Isserlies, 48, 141.

Jahnke, 119.
Jochams, 137, 141, 173.
Jonquières (de), 185.
Juhel-Rénoy, 257.

Kiehl, 154.
Klein (Félix), 123.
Kollros, 17.
Kommerel, 212.
Kronecker, 18.
Krumspiegel, 38.

Lagny, 127, 238.
Lagout, 237.
Lagrange, 18.
Laguerre, 208.
Lalande, 64.
Lallemand, 247.
Laisant, 80, 129.
Lambo, 37.
Lamotte, 74, 76, 105, 106.
Latters, 19.
Lecornu, 246.
Lefebvre, 38.
Lefrançois, 18.
Legendre, 183.
Lemoine, 74, 153, 176, 274.
Lepiney (de), 43, 48, 140, 161, 170, 200, 221, 224, 232, 251, 254, 273, 277, 278.
Leurechon, 38.
Lez, 23, 27, 31, 40, 74, 104, 105, 106, 108, 137, 138, 144, 148, 171, 173, 194, 228.
Liebmann, 123.
Liénard, 45, 68, 97, 161.
Listray, 257.
Liouville, 208.
Lobatto, 208.
Lobatschefsky, 158.
Longchamps (G. de), 207.
L'Hopital, 207.
Loria, 208, 214.
Lucas (Ed.), 15, 37, 154.

Machin, 60, 127.
Maclaurin, 118.
M'Kensie, 159, 257.
Malaise, 131, 218.
Mannheim, 156.
Mansion, 19, 27, 31, 60, 65, 103, 129, 133, 183, 242, 245, suppl. 3.
Marote, 64.
Marre (A), 37.
Maskelyne, 59.
Massau, 9, 124.
Meray, 64, 268.
Metius (Adrien), 127.
Miquel, 153.
Möbius, 154.
Monge, 19, 215.
Montessus (de), 245.
Mulkeman, 236.
Müller, 207, 231.
Müller (Félix), 268.
Mydorge, 38.

Nagel, 106, 154, 275.
Nanson, 79, 195.
Netto, 245.
Neuberg, 16, 32, 33, 48, 49, 65, 69, 72, 74, 80, 85, 102, 107, 112, 130, 132, 134, 138, 144, 148, 160, 174, 176, 181, 185, 193, 200, 201, 218, 219, 224, 233, 248, 252, 256, 257, 269, 270, suppl. 2.
Newton, 245.
Nicomède, 118.

Ocagne (d'), 124.
Ogereau, 64.
Oughtred, 38.

Pappus, 13, 217.

Digitized by Google

Pascal, 118, 217, 257.
Patricin, 181.
Peano, 158.
Pécaut, 64.
Perseus, 118.
Petroff, 101.
Picard, 244.
Picciolli, 13.
Pieri, 64, 156.
Plakhovo, 24, 68, 99, 105, 106, 225, 254.
Popoff, 243.
Prange, 31, 68, 105, 188, 223, 228, 230.
Ptolémée, 238.
Pund, 101.
Pythagore, 38, 257, 275.

Quint, 126, 236.

Radev, 40.
Ravasco, 230.
Retali, 44, 46, 158, 223, 227, 247.
Rheticus, 155.
Ricci, 207.
Riemann, 19, 156.
Rolle, 118.
Romain, 187, 240.
Rose, 21, 23, 32, 40, 45, 46, 48, 68, 71, 72, 74, 99, 105, 106, 107, 108, 137, 177, 194, 216, 225, 227, 238, 239, 247, 252, 254, 259, 262, 265.
Rouché, 269.
Rouse Ball, 37.
Ruiz-Castiza, 119.
Rutherford, 128, 238.

Saint-Venant (de), 14.
Saint-Vincent (Grégoire de), 31, 207.
Saleta, 156.
Salkin, 230.
Salmon, 43.
Sanjuna, 31.
Schaar, 18.
Scheybl, 67.
Schlömilch, 215.
Schubert, 19.
Schütte, 214.
Schwartz, 215.
Schwering, 185, 232.
Seam, 40, 99, 105, 106.
Servais (Cl.), 94, 160.
Shanks, 127, 238.
Sharp, 128, 238.
Simon (Max.), 90.
Simson, 33, 257.
Sluze, 118.
Smith, 158.
Snell, 240.
Stäckel, 269.
Stainville (de), 207.
Steiner, 153, 257.
Stevin, 123.
Stewart, 182.
Stolz, 68.
Sturm (Ch.), 186.
Stuyvaert, 17, 82.
Sylvester, 245.

Talbot, 119.
Tannery (J.), 60, 65.
Tannery (P.), 38.
Tartaglia, 207.
Taylor, 76.
Teixeira, 118.
Terloo, 59.
Terracini, 68.
Terquem, 154.
Thabit-ben-Korrah, 38.
Theodorescu, 39.
Theodoroff, 243.
Tummers, 49, 199.
Tycho-Brahé, 155.

Van Aubel (H), 131.
Van Ceulen, 127, 241.
Van de Griend, 182
Vander Eycke, 241.
Vandervennet, 123.
Van Dinter, 21, 23, 68, 71, 72, 76, 169, 279.
Van Etten, 38.
Van Rees, 118.
Vega, 127, 238.
Vercellin, 175, 198.
Verhengen, 23, 25, 28, 40, 45, 46, 71, 73, 98, 105, 107, 108, 112, 134, 137, 138, 167, 171, 223, 227, 228, 230, 252, 255, 259, 273, 273, 275, 279.
Viète, 127, 239.
Vincent, 38.
Vivanti, 208.
Vuibert, 111.

Wallis, 118.
Wallner, 208.
Wargny, 21, 247.
Waring, 38.
Wasteels, 7, 81, 120.
Watt, 119.
Weber (H.), 122.
Weber (R.), 122.
Weierstrass, 18.
Welch, 267.
Wellstein, 122.
Werner, 154.
Whitehead, 232.
Wieleitner, 79, 144, 232, 247.
Wilson, 17.
Worms de Romilly, 156.

Youngman, 132,

Zacharias, 200.
Zeeman, 233.

Digitized by Google

GAUSS CONTRE KANT

SUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE

PAR

Paul MANSION
PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE GAND
MEMBRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, ETC.

LOUVAIN
INSTITUT SUPÉRIEUR DE PHILOSOPHIE
1, RUE DES FLAMANDS, 1
—
1908

Digitized by Google

Digitized by Google

GAUSS CONTRE KANT

SUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE *).

1. *Objet de cette Note.* Depuis un quart de siècle, on s'est occupé plusieurs fois de la géométrie non euclidienne dans ses rapports avec la *Critique de la raison pure*. Mais la plupart des auteurs qui ont examiné cette question, p. ex., Helmholtz, A. Krause, C. Sentroul, L. Nelson, W. Meinecke, ne semblent pas avoir connu les recherches les plus remarquables au point de vue philosophique, sur les principes de la géométrie.

En particulier, la plupart de ceux qui ont écrit sur ce sujet, Vassilief et Veronese exceptés, ont négligé les critiques que Gauss a nettement formulées, il y a plus de trois quarts de siècle, contre le postulat fondamental de Kant : *L'espace est une représentation nécessaire a priori qui est le fondement de toutes les intuitions extérieures.* (Kritik der reinen Vernunft, éd. von Kirchmann, p. 75.)

Les assertions de Gauss sur ce point sont tellement catégoriques qu'il faut admettre ou bien que Kant s'est radicalement trompé dans ses vues sur l'espace, ou que Gauss n'a pas compris la *Critique de la raison pure*.

Pour ceux qui connaissent la profondeur et la tournure philosophique du génie de Gauss et qui savent la place presque unique qu'il occupe dans l'histoire des sciences

*) Cette étude a été présentée, le 3 septembre 1908, au Congrès international de Philosophie de Heidelberg (31 août-5 septembre 1908).

Digitized by Google

mathématiques et physiques (théorie des nombres, haute analyse, géométrie infinitésimale, physique, astronomie, théorie des erreurs d'observation), il est bien difficile d'admettre la seconde alternative. Gauss a été contemporain du mouvement d'idées soulevé par la *Critique de la raison pure*. Il a dû examiner à fond un livre dont des considérations sur l'espace sont une des bases essentielles et qui faisait tant de bruit à une époque où lui-même se livrait aux profondes méditations, qui, après un quart de siècle d'efforts, devaient lui faire trouver la géométrie non euclidienne.

L'autre alternative, au contraire, n'a rien d'invraisemblable *a priori*. Kant a montré, dans la *Critique de la raison pure* même et ailleurs, qu'il ne connaissait que très mal les éléments des mathématiques ; il ne s'est nullement tenu au courant des recherches qui ont paru de son temps, sur les premiers principes de la géométrie.

Dans la présente Note, nous allons faire connaître les vues essentielles de Gauss sur l'espace en les situant dans l'histoire de la géométrie non euclidienne, entre les recherches qui les préparent et celles qui les complètent sur la métaphysique de la géométrie.

Nous indiquerons ensuite l'erreur singulière de Kant touchant le prétendu paradoxe des objets symétriques, qui a été l'origine de son postulat fondamental sur l'espace ; enfin nous signalerons les lacunes de son information mathématique et ses conséquences.

2. *Les précurseurs inconscients de la découverte de la géométrie non euclidienne : Proclus, Saccheri, Lambert, Legendre.* Contrairement à une opinion très répandue, il n'est pas vrai qu'après Euclide, son célèbre cinquième postulat [1]), ou *postulat des trois droites*, ait été admis comme

[1]) « [Qu'il soit demandé que,] si une droite rencontrant deux droites [situées dans un même plan], fait avec celles-ci, d'un même côté, des angles intérieurs dont la somme soit moindre que deux droits, les deux droites prolongées indéfiniment se rencontrent du côté où la somme est inférieure à deux droits. »

Digitized by Google

évident par les géomètres. Au contraire, ils n'ont cessé d'essayer de le démontrer, dans l'antiquité, au moyen âge, à la Renaissance, au XVII^e^, au XVIII^e^, au XIX^e^ siècle.

Il y a plus. Dès l'antiquité, on en a douté : Proclus, à propos du cinquième postulat d'Euclide, se demande *si deux droites d'un plan ne peuvent pas être asymptotes l'une de l'autre*. Or ce doute de Proclus, qui n'a pas échappé aux géomètres de la Renaissance, est, au fond, l'idée-mère de la géométrie lobatchefskienne qui peut s'en déduire logiquement tout entière. — Dans la *Divine Comédie* (Par. XIII, 101-102) Dante exprime un doute semblable, qui a été signalé par Halsted.

Saccheri (1667-1733) est le créateur de la *Critique des postulats*. Pour voir si le postulat des trois droites est indépendant des vérités géométriques admises antérieurement, il établit un système logique de géométrie indépendant de ce postulat et prouve que, dans ce système, deux droites se coupent, ou sont asymptotes ou ont une perpendiculaire commune et divergent indéfiniment (1733). Le livre de Saccheri ne passa pas inaperçu : il fut analysé par Klügel, en 1763, dans une dissertation critique sur les principaux essais de démonstration de la théorie des parallèles.

Le célèbre mathématicien suisse, Lambert (1728-1777), l'un des correspondants de Kant, ajoute aux résultats de Saccheri le beau théorème : Si l'on rejette le cinquième postulat d'Euclide, la surface d'un triangle est proportionnelle à l'excès de deux droits sur la somme de ces angles (1766; publié en 1786). Corollaire : la géométrie métrique dépend d'une *constante spatiale*, à déterminer par l'observation.

En 1794, Legendre (1752-1833) donne, dans la note II de la première édition de ses *Eléments de Géométrie* (et aussi dans toutes les éditions subséquentes), un essai de démonstration fonctionnelle d'une proposition équivalente au postulat des trois droites. Cette démonstration renferme une

Digitized by Google

erreur de raisonnement qu'il suffit de corriger, comme l'a indiqué Gauss (*Werke*, VIII, p. 168), pour retrouver, de la manière la plus simple, l'importante remarque de Lambert sur la constante spatiale.

Saccheri, Lambert, Legendre ne sont que des précurseurs inconscients de la métagéométrie ; car tous trois détruisent de leurs propres mains l'édifice de la géométrie non euclidienne (lobatchefskienne et, ça et là, riemannienne) qu'ils ont commencé à élever : Saccheri, au nom de faux principes sur les infiniment petits, Lambert et Legendre, parce qu'ils trouvent invraisemblable que la géométrie dépende d'une constante spatiale, comme la géométrie des figures tracées sur une sphère dépend de son rayon.

3. *Gauss* (1777-1855). *La constante spatiale.* Gauss, à vingt-deux ans, était parvenu à démontrer enfin avec rigueur le principe fondamental de l'analyse algébrique (1799), ce que n'avaient pu faire ni Euler, ni Lagrange ; à vingt-quatre, il avait publié ce livre prodigieux, les *Disquisitiones arithmeticae* (1801) où il dépassait d'un seul coup, Euler, Lagrange et Legendre, dans la plus difficile des sciences mathématiques, l'arithmétique supérieure. C'est à ce profond penseur qu'il était réservé de voir clair, le premier, dans la question du postulat des trois droites et de faire de la notion de constante spatiale la pierre angulaire de la philosophie de la géométrie.

Depuis 1792 (*Werke*, VIII, pp. 238, 221, 213, 200), il ne cessait de méditer sur le mystère du cinquième postulat ; en 1794, il avait retrouvé le théorème de Lambert (*Werke*, VIII, p. 266) et auparavant, très probablement, celui de Saccheri (*Ibid.*, pp. 163-164, 202-209). Mais ce n'est que vers 1816 (*Ibid.*, pp. 175-176) qu'il est en possession de la métrique non euclidienne. Dès lors il est certain que le postulat est indémontrable, il voit l'extrême importance de la notion de constante spatiale, et il crée dans sa tête, pour lui seul, la géométrie non euclidienne,

Digitized by Google

avec l'intention d'en faire plus tard un exposé complet, à publier après sa mort.

Montrons-le par quelques citations de ses lettres.

(A). 1816, 11 avril. « Dans un triangle équilatéral,... le côté est une fonction de l'angle, fonction où entre en même temps une ligne constante » (*Werke*, VIII, p. 169).

(B). 1817, 28 avril. « Je suis de plus en plus convaincu que la nécessité de notre Géométrie ne peut être prouvée... On ne devrait pas placer la Géométrie à côté de l'Arithmétique qui est purement *a priori*, mais la mettre sur le même rang que la Mécanique » (*Ibid.*, p. 177).

(C). 1819, 16 mars). « J'ai poussé la géométrie astrale [c.-à.-d. non euclidienne] assez loin pour pouvoir résoudre tous les problèmes aussitôt que la constante = C est donnée » (*Ibid.*, p. 182).

(D). 1824, 8 novembre. « Je puis résoudre tout problème de géométrie non euclidienne à l'exception de la détermination d'une constante qui ne se laisse pas obtenir *a priori*. Plus cette constante est grande, plus on se rapproche de la géométrie euclidienne, qui correspond à une valeur infinie de la constante ». « Si la géométrie non euclidienne était la vraie [géométrie réalisée dans la nature] et si cette constante était dans un certain rapport avec les grandeurs accessibles à nos mesures sur la terre ou au ciel, on pourrait l'obtenir *a posteriori* » (*Ibid.*, p. 187).

(E). 1829, 9 avril. « Nous devons reconnaître humblement que si le nombre est *purement* une création de notre esprit, l'espace est pour notre esprit une réalité à laquelle nous ne pouvons pas attribuer des lois complètement *a priori* » (*Ibid.*, p. 201).

(F). 1832, 6 mars. « Par l'impossibilité où l'on est de distinguer *a priori* entre Σ [géométrie euclidienne] et S [géométrie non euclidienne] se trouve précisément démontré, le plus clairement, que Kant a eu tort d'affirmer que l'espace est *seulement la forme* de notre intuition » (*Ibid.*, p. 224, ou *Mathematische Annalen*, XLIX, p. 166).

Digitized by Google

Jusque vers cette époque, ce n'était que sur l'autorité de Gauss que ses correspondants devaient admettre ces assertions si importantes. Mais, en 1832, toutes venaient d'être prouvées par Jean Bolyai (1802-1860) dans le célèbre *Appendix* au *Tentamen* de son père. Trois ans auparavant, Lobatchefsky (1793-1856) les avait aussi démontrées dans son premier mémoire russe sur la géométrie qui porte son nom, et qu'il devait exposer d'une manière si complète dans l'ensemble de ses travaux. En 1854, Riemann doublait virtuellement l'étendue de la géométrie non euclidienne en observant, au fond, que le *postulat des deux droites*, ou sixième postulat d'Euclide [1]), n'est pas plus contenu que le cinquième dans la définition habituelle de la droite. En 1878, De Tilly (1837-1906) donnait, en partant de la notion de distance, un exposé complet des principes de cette géométrie riemannienne, en même temps que de l'euclidienne et de la lobatchefskienne. D'illustres mathématiciens, Cayley, Lie, etc., traduisaient en analyse les spéculations des géomètres proprement dits sur les principes de la géométrie. Barbarin y ajoutait, en 1897, le beau théorème suivant qui permet de dissiper bien des nuages : Dans chacune des trois géométries, il y a des surfaces dont les géodésiques ont les propriétés de la droite des deux autres géométries, dans le plan de ces géométries.

Les géomètres non euclidiens ont donc établi l'égale valeur logique des géométries euclidienne, lobatchefskienne, riemannienne ; ces géométries, aussi peu différentes que l'on veut l'une de l'autre, expliquent également bien les propriétés de l'espace réel. En particulier, comme Gauss l'a dit, *a priori*, il est impossible de savoir si la constante spatiale est infinie ou non, si la géométrie est euclidienne ou non. *A posteriori*, la constante spatiale ne pouvant jamais être déterminée qu'approximativement, on ne peut

[1]) « [Qu'il soit demandé que] deux droites ne contiennent pas d'espace. »

Digitized by Google

jamais savoir, par l'observation ou l'expérience, si la géométrie physique est euclidienne, *même si elle l'est réellement*.

4. *Gauss et le nombre des dimensions de l'espace. De Tilly*. Gauss ajoute après ces derniers mots de notre dernière citation (6 mars 1832) : « Kant a eu tort d'affirmer que l'espace est *seulement la forme* de notre intuition », ce qui suit : (F) « J'en ai indiqué une autre raison, tout aussi probante, dans un petit article qui a paru dans les Göttingische gelehrte Anzeigen en 1831, partie 64, p. 625 » (*Werke*, VIII, p. 224 ou *Mathematische Annalen*, XLIX, p. 166). Le 8 février 1846, il signale de même la portée de cet article à Schumacher (*Ibid.*, p. 247). En voici le passage essentiel avec quelques autres dans le même sens :

(G). 1831, 23 avril. « La distinction entre à droite et à gauche est *en soi* complètement déterminée, aussitôt que l'on a fixé (à volonté) le sens des mots en avant et en arrière *dans* le plan et des mots au-dessus et au-dessous par rapport aux deux faces du plan. Cependant nous *ne* pouvons communiquer aux autres l'intuition que nous avons de cette distinction *que* par des indications relatives à des objets matériels présents devant nous ». Puis en note : « Kant a déjà fait ces deux remarques, mais on ne conçoit pas comment ce philosophe pénétrant a pu trouver dans la première une preuve de son opinion que l'espace *n'*est *qu'*une forme de notre intuition extérieure, puisque la seconde remarque prouve si clairement le contraire et prouve aussi que l'espace, indépendamment de notre mode d'intuition, doit avoir une signification réelle » (*Gauss Werke*, II, second tirage, p. 177 ; extrait des Göttingische gelehrte Anzeigen, 1831, 23 avril).

(H). 1846, 8 février. « La différence entre à droite et à gauche ne peut se définir, mais seulement se montrer » (*Werke*, VIII, p. 247).

(I). 1846, 23 juin. « Trois droites AB, AC, AD,..., non

Digitized by Google

situées dans un même plan, peuvent être dans la même situation relative ou non que trois autres *ab*, *ac*, *ad*. La *différence* de ces deux systèmes de trois droites *ne* peut *pas* se réduire à des concepts mais seulement se **montrer** (vor**zeigen**) sur des objets réellement existants (*Ibid.*, p. 248).

Comme on le voit, Gauss a été fortement frappé de ce fait d'observation que l'espace réel a trois dimensions et qu'il est impossible de réduire cette intuition à des concepts.

De Tilly — et avant lui, partiellement, Lobatchefsky, après lui, plusieurs géomètres contemporains, — ont analysé davantage la question du nombre des dimensions de l'espace, en définissant celui-ci, en géométrie abstraite, au moyen du concept d'*intervalle*, auquel répond, en géométrie physique, la *distance*. Pour simplifier, disons *distance* dans les deux cas.

Voici, en substance, la définition que donne De Tilly de la droite, du plan et de l'espace à trois ou plus de dimensions. Pour la droite et le plan, Leibniz (1646-1716), Cauchy (1789-1857) et, au fond, Lobatchefsky, étaient arrivés, chacun de son côté, à la même définition, sans que d'ailleurs De Tilly en ait rien su : « *L'espace est à une* (droite), *deux* (plan), *trois*, *quatre*,..., *m dimensions selon que les points y sont déterminés par leurs distances à deux*, *trois*, *quatre*, *cinq*,..., *(m + 1) points fondamentaux*, *ceux-ci n'appartenant pas à un espace d'ordre inférieur et étant déterminés par leurs distances mutuelles*.

Les concepts de point et de distance suffisent pour établir la géométrie abstraite à un nombre quelconque de dimensions. Mais en géométrie physique, ou *physique mathématique des distances*, l'observation et l'expérience peuvent seules nous apprendre s'il faut deux, trois, quatre, cinq distances ou plus pour déterminer la position d'un point, ou si l'espace a une, deux, trois, quatre dimensions ou plus. C'est la pensée même de Gauss. Si tous les corps de la nature avaient quatre dimensions, la quatrième étant

Digitized by Google

moindre qu'un millionième de micron, nous ne pourrions pas nous en apercevoir, parce que nous ne pouvons mesurer des distances aussi petites.

5. *Origine du postulat de Kant sur l'espace : le prétendu paradoxe des objets symétriques ; insuffisance des connaissances mathématiques de Kant.* Kant a publié, en 1768, la dissertation intitulée : *Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume* (*Werke*, éd. Rosenkranz und Schubert, V, pp. 291-301) où il expose longuement ce qu'on a appelé le *paradoxe* [de l'équivalence] *des objets symétriques*. Il trouve, dans ce paradoxe, une *preuve évidente* que l'espace a une réalité propre indépendante de l'existence de la matière (*Ibid.*, p. 294). En 1770, il fait paraître la première esquisse de la *Critique de la raison pure* sous le titre : *De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis* (*Ibid.*, I, pp. 301-341). Cette fois, il déduit du paradoxe des objets symétriques que l'espace n'est pas objectif ni réel, ni substance, ni accident, ni relation, mais qu'il est quelque chose de subjectif et d'idéal, une forme pure de l'entendement, fondement de nos intuitions sensibles (*Ibid.*, p. 322). La même déduction se trouve exposée dans le § 13 des *Prolegomena* (1783).

Malheureusement, le paradoxe des objets symétriques n'existe pas : *les objets symétriques sont équivalents parce qu'ils sont composés de parties égales, ou*, comme on dit, *superposables*. On le démontre aisément. Dans son Mémoire de 1768, Kant avait remarqué que l'égalité ou la superposabilité existe et qu'il n'y a pas de paradoxe, quand les objets considérés sont *autosymétriques*, c'est-à-dire ont un plan de symétrie (*Werke*, éd. Ros. u. Sch., V, pp. 299-300). Or *tous les corps sont composés de parties autosymétriques*. Il suffit évidemment de le prouver pour un tétraèdre ABCD. Appelons O le centre de la sphère circonscrite ; α, β, γ, δ, les projections de O sur les faces BCD, CDA, DAB, ABC : le tétraèdre est la somme algébrique de douze tétraèdres analogues à OαBC, OδBC, qui sont

Digitized by Google

autosymétriques. Cette démonstration, dont nous ignorons le premier auteur, se trouve dans la 3e édition des *Éléments de Géométrie* (pp. 339-349) de Legendre (Paris, Didot, 1800). Elle a été retrouvée, en 1844, par Gerling et Stegmann (*Gauss Werke*, VIII, pp. 242-243). Si O est le centre de la sphère inscrite, ABCD est la somme arithmétique de six hexaèdres autosymétriques analogues à OαBCδ, ce qui prouve le théorème d'une manière plus simple (Darboux, *Bulletin des sciences mathématiques*, 1900, XXIV, 1re partie, p. 274).

Le soi-disant paradoxe des objets symétriques étant un simple théorème d'équivalence qui ne présente rien de mystérieux, le postulat de Kant sur l'espace comme représentation nécessaire *a priori* est inutile pour l'expliquer. Des remarques de Kant sur ce sujet, dans sa dissertation latine et ailleurs, il ne reste que celle-ci, dont Gauss a signalé en 1831, comme nous l'avons dit plus haut (n° 4, G), la portée antikantienne : « *Quae jaceant in spatio dato unam plagam versus, quae in oppositum vergant, discursive describi, s. ad notas intellectuales revocari nulla mentis acie possunt* » (*Werke*, éd. Ros. u. Sch., I, pp. 321-322).

Kant a donné d'autres preuves que le prétendu paradoxe des objets symétriques, qu'il connaissait mal les mathématiques. Dans la *Critique de la raison pure*, faute de bien savoir la définition du signe + et de 5, il ne voit pas que l'on peut prouver que $7 + 5 = 12$, par une suite de jugements analytiques (éd. von Kirchmann, p. 58). Il ne connaît pas (ou méconnaît la rigueur de) l'admirable démonstration d'Euclide pour la proposition XX du 1er livre des *Éléments* et, par suite, ne comprend rien au postulat sur la droite qui permet à Archimède de définir la longueur des lignes courbes (*Ibid.*, pp. 76, 59). Dans le passage de la préface de la seconde édition de la *Critique* (*Ibid.*, p. 28), où il se compare assez naïvement à Copernic, il attribue à celui-ci cette idée qu'il est difficile d'expliquer les mouvements du ciel en admettant que l'armée des astres tourne

Digitized by Google

autour du spectateur : or, Copernic, comme Ptolémée d'ailleurs, savait que, pour expliquer les mouvements célestes, on peut considérer comme immobile tel corps que l'on veut, pourvu que l'on transporte, en sens contraire, à tous les astres, le mouvement dont on le suppose animé dans une autre explication.

Kant a eu le tort aussi de ne pas se tenir au courant des études critiques qui parurent de son temps sur les principes de la géométrie (Saccheri, Klügel, Lambert). Il aurait dû surtout ne pas négliger la dissertation de Lambert, son correspondant, qui lui avait envoyé des critiques si judicieuses sur l'esquisse latine (1770) de la *Critique de la raison pure* (*Werke*, éd. Ros. u. Sch., I, pp. 363-369, surtout p. 369). S'il avait étudié à fond la dissertation de Lambert, il aurait reconnu, comme Gauss, que la notion de constante spatiale fait crouler son postulat fondamental.

Pour sauver l'apodicticité de la géométrie, Kant a placé dans l'entendement l'espace comme une forme innée conférant les propriétés géométriques aux données des sens. Mais Gauss et ses continuateurs ont prouvé qu'il y a, dans l'entendement, un nombre indéfini d'espaces, caractérisés chacun par une constante spéciale, et expliquant aussi bien les uns que les autres, les phénomènes géométriques du monde sensible. Le postulat de Kant est par trop simpliste et n'explique rien; au fond, il a pour Kant le sens suivant : « l'espace est une représentation nécessaire *a priori* telle qu'elle donne aux intuitions extérieures les propriétés énoncées dans les Éléments d'Euclide ».

On a dit, en parlant de certains mémoires consacrés à Kant, en 1904, par la Revue de Métaphysique et de Morale, qu'au xx^e^ siècle, la philosophie des mathématiques de Kant a vieilli, qu'elle est dépassée. Il nous semble qu'elle l'eût été au lendemain de la publication des Éléments d'Euclide, si Kant avait écrit à Alexandrie, trois siècles avant Jésus-Christ. Euclide, en effet, avait eu la prudence

Digitized by Google

de donner, non comme des *jugements synthétiques a priori*, mais comme des *postulats*, les deux célèbres propositions sur deux ou trois droites qu'il a suffi de laisser de côté pour trouver la géométrie riemannienne et la géométrie lobatchefskienne : il laissait la porte ouverte à la science de l'avenir. Kant la fermait, et Proclus, s'il avait été kantien, n'aurait pu penser à l'asymptotisme des droites.

6. *Conclusion : la géométrie philosophique du vingtième siècle.* La géométrie abstraite tout entière, ou *métagéométrie*, est contenue dans la relation suivante, équivalente à celle de Lagrange et de Schering, et traduction de la définition de l'espace de De Tilly :

$$\alpha_1 (x\,1) + \alpha_2 (x\,2) + \ldots + \alpha_n (xn) = \beta,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ sont des constantes, (xy) une fonction u de la distance xy de deux points x, y telle que, u étant donné, xy ait ou puisse avoir une seule valeur positive. Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0$, on peut faire $\beta = 1$; (xy) est le carré de la distance xy, et la géométrie est dite euclidienne. Dans le cas contraire, $\beta = 0$, $(xy) = [\cos xy : l]$ ou $(xy) = [\mathrm{ch}\, xy : r]$, la géométrie est dite non euclidienne (lobatchefskienne ou riemannienne). Pour l ou r infini, la géométrie non euclidienne devient la géométrie euclidienne ; l ou r est la *constante spatiale*, $m = n - 2$, le *nombre des dimensions* de l'espace. La métagéométrie ne contient que des *jugements analytiques* comme la théorie des nombres ou l'analyse.

La géométrie physique, ou *physique mathématique des distances du monde sensible*, correspond à une seule valeur de m et de l ou r. Jusqu'à présent, on a pu expliquer les phénomènes de la géométrie physique en supposant $m = 3$. L'observation et l'expérience prouvent que la constante spatiale est très grande par rapport à toutes les grandeurs accessibles à nos mesures. On peut résumer cela en disant

Digitized by Google

que *la géométrie physique est approximativement euclidienne à trois dimensions*, assertion qui renferme *deux jugements synthétiques a posteriori.*

Gooreind-Wuestwezel, le 28 août 1908.

Texte allemand des deux principaux extraits de Gauss.

F. (Gauss an Wolfgang von Bolyai. Göttingen, 6. März 1832). « Gerade in der Unmöglichkeit zwischen Σ [Euklidische Geometrie] und S [Nicht-Euklidische Geometrie] a priori zu entscheiden liegt der klarste Beweis, dass Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei *nur Form* unserer Anschauung. Einen andern ebenso starken Grund habe ich in einem kleinen Aufsatze angedeutet, der in den Göttingischen gelehrten Anzeigen 1831 steht, Stuck 64, p 625 » (*Gauss Werke*, B. VIII, p. 224).

G. (Göttingische gelehrte Anzeigen. 1831, April 23. Gauss, Selbst-Anzeigen der *Theoria Residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda*). « Dieser Unterschied zwischen rechts und links, ist so bald man vorwärts und rückwärts *in* der Ebene, und oben und unten in Beziehung auf die beiden Seiten der Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, *in sich* völlig bestimmt, wenn wir gleich unsere Anschauung dieses Unterschiedes andern *nur* durch Nachweisen an wirklich vorhandenen materiellen Dingen mittheilen können » *).

*) (Nota von Gauss). « Beide Bemerkungen hat schon Kant gemacht, aber man begreift nicht, wie dieser scharfsinnige Philosoph in der ersteren einen Beweis für seine Meinung dass der Raum *nur* Form unserer äussern Anschauung sei, zu finden glauben konnte, da die zweite so klar das Gegentheil, und dass der Raum unabhängig von unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung haben muss, beweiset » *(Gauss Werke*, B. II, zweiter Abdruck, p. 177).

Digitized by Google

Extrait de la *Revue néo-scolastique*,
1908, t. XV, n° 4, pp. 441-453.

Digitized by Google

EN VENTE CHEZ LES MÊMES LIBRAIRES

A. A Markof. Istchislenie Vêroïatnostei. Vtoroe izdanie (Calcul des probabilités; seconde édition) Saint-Petersbourg. Typographie de l'Académie impériale des sciences (In-8 de IV-284 pp.) . . . . . .

E. Czuber. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Erster Band Zweite, sorgfältig durgesehene und erweiterte Auflage. LT, 1908 (In-8 cartonné de X-410 pp.). marcs 12 00

H. Schuermans. Développement d'une puissance quelconque d'un polynome. Gand, Vanderpoorten. 1908. (In-folio de 81 pp.) . . . . . fr. 6 00

V. v. Dantscher. Vorlesungen über die Weierstrassche Theorie der Irrationalen Zahlen. LT, 1908 (In-8, de VI-80 pp.). . . . . marcs 2 80

A. Schoenflies. Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Zweiter Teil. LT, 1908 (In-8 de X-380 pp.). . . . . marcs 13 00

F. Enriques. Fragen der Elementar-Geometrie. II. Teil. Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit. LT, 1907 (Cartonné in-8 de XII-348 pp.) . . . . . marcs 9 00

O. Richter. Kreis und Kugel in senkrechter Projection LT. 1908 (In-8 de X-188 pp.) . . . . . marcs 4 40

R. Sturm. Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. LT, 1908 (Cartonné, in 8 de XII-416 pp. et de VIII-346 pp.) . . . . marcs 32 00

M. Fr. Daniels. Essai de Géométrie sphérique en coordonnées projectives. Fribourg (Suisse), O. Gschwend, 1907 (Gr. in-8° de XII-280 pp. avec 44 fig.).

H. E. Timerding. Geometrie der Kräfte. LT, 1908 (Cartonné, in-8, de XII-331 pp.). . . . . marcs 16 00

H. Wieleitner. Specielle ebene Kurven. Leipzig, Göschen, 1908 (In-12 cartonné de XVI-409 pp.). . . . . marcs 12 00

R. v. Lilienthal. Vorlesungen über Differentialgeometrie. Erster Band: Kurventheorie. LT, 1908 (In-8 cartonné de VI-368 pp.). . . marcs 12 00

E. Müller. Lehrbuch der darstellenden Geometrie für technische Hochschulen. Erster Band. LT, 1908 (In-8 cartonné de XIV-368 pp. avec 3 pl.). . . . marcs 12 00

M. Planck. Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Zweite Auflage. LT, 1908 (In-12 cartonné de XVI-278 pp.) . . . . . marcs 6 00

R. Gans, Einführung in die Theorie des Magnetismus. LT, 1908 (In-12 de VI-110 pp.). . . . . marcs 2 40

K. W Wagner. Elektromagnetische Ausgleichungsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. LT, 1908 (In-12 de IV-110 pp.). . . . . marcs 2 40

Cl. Schaefer. Einführung in die Maxwellsche Theorie der Electrizität und des Magnetismus. LT, 1908 (In-12 de VIII-174 pp. avec portrait de Maxwell). marcs 3 40

Avis aux auteurs de questions résolues.

Prière instante aux auteurs de questions résolues de les envoyer à la Rédaction de *Mathesis* sous une forme qui permette de les livrer à l'impression sans leur faire subir des retouches. Pour cela : 1° Ecrire sur une première ligne le mot *question* précédé ou non de la croix et le n° de la question, et soulignés par une ligne ondulée. 2° Ecrire sur une seconde ligne, avec la parenthèse habituelle, Mathesis, *sans accent*, ce mot étant souligné, avec l'indication de l'endroit où la question a été posée. 3° Transcrire l'énoncé de la question, souligné en entier. 4° Mettre au bout le nom de l'auteur de la question souligné *deux* fois, entre parenthèses. 5° Commencer les premières lignes de la solution, par les mots : *Solution par* soulignés une fois, suivi du nom de l'auteur souligné *deux* fois. 6° Continuer, sans aller à la ligne. 7° Dans le texte de la solution, aller à la ligne chaque fois que l'on doit écrire une égalité ou une équation qui n'est pas très courte. 8° Ecrire $\frac{1}{2}a$ plutôt que $\frac{a}{2}$; $(n-p)$ plutôt que $\overline{n-p}$: *angle* ABC plutôt que $\widehat{ABC}$, $\sqrt{a}$ plutôt que $\sqrt{a}$. 9° Observer les règles de ponctuation *française*, et non celles de la ponctuation *belge*. 10° Laisser une marge.

Prière à nos correspondants de joindre leur adresse PRÉCISE à CHACUN de leurs envois, au bas de leur article.

Digitized by Google

SOMMAIRE.

	Pages
Sur deux théorèmes de Simson et de Steiner et le théorème de M. Aubert, par J. Juhel-Rénoy	257
Concours général de l'enseignement moyen (1908)	259
×Notes mathématiques	267
Bibliographie	268
Solutions de questions proposées (1659, 1674, ×1678, ×1682, 1683)	270
Questions d'examen (1409 à 1412)	279
Questions proposées (1696 à 1700)	280
Tables des matières	281

Les articles marqués d'une croix peuvent être compris. les questions marquées d'une croix peuvent être résolues, au moyen des mathématiques élémentaires.

Les articles destinés à *Mathesis* doivent être adressés *franco de port*, à M. P. MANSION, quai des Dominicains, 6, Gand, ou à M. J. NEUBERG, rue de Sclessin, 6, Liége.

Ils doivent être écrits lisiblement et sur un seul côté de la feuille. Une même feuille doit contenir un seul article ou une seule question résolue, **précédée de l'énoncé de la question**. Les auteurs de notes *exigeant des figures* sont priés de *dessiner celle-ci, avec soin, dans le format du journal, sur des feuilles séparées*. Les auteurs de *Questions à résoudre* sont priés de donner, avec les énoncés, *un aperçu des solutions*.

La Rédaction ne renvoie pas les manuscrits non insérés.

Les auteurs d'articles insérés dans *Mathesis*, qui en avertissent la **Rédaction** à temps, *en donnant leur adresse*, peuvent obtenir des tirages à part moyennant 5 francs, par feuille ou fraction de feuille, pour 100 exemplaires, 3 francs pour 50 exemplaires, 2 francs pour 30 exemplaires, frais de remaniement non compris.

Les ouvrages de mathématiques dont on enverra un ou deux exemplaires à M. P. MANSION, seront annoncés ou analysés dans le journal. Prière d'en d'indiquer le prix.

Mathesis paraît, en général, vers le 15 de chaque mois, par livraisons de 24 pages, qui peuvent être accompagnées de suppléments. Prix de l'abonnement annuel (**payable par anticipation**) :

Pour la Belgique . . . . . fr. 7 50
Pour l'Etranger. . . . . » 9 00

On s'abonne chez M. AD. HOSTE, rue des Champs, 47. Gand (par un mandat postal, p. ex.) et chez M. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55, à Paris.

Les réclamations, changements d'adresse, etc. doivent être adressés, NON aux rédacteurs, mais à M. HOSTE.

Les nouveaux abonnés de *Mathesis* qui en feront la demande à M. MANSION, *en donnant leur adresse exacte*, recevront gratuitement les articles intitulés : 1° *Les premiers principes de la géométrie*, par M. DE TILLY ; 2° *Un autre mémoire* ; 3° *Sur la méthode analytique des anciens*, par M. P. MANSION ; 4° *Questions d'admission à l'Ecole militaire de Bruxelles* (1904) (ensemble 47 pages), ou d'autres Mémoires équivalents.

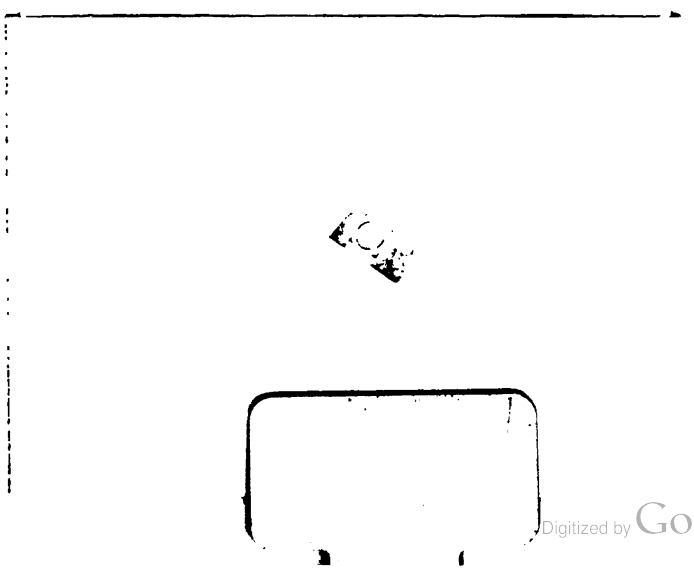
Digitized by Google

Digitized by Google

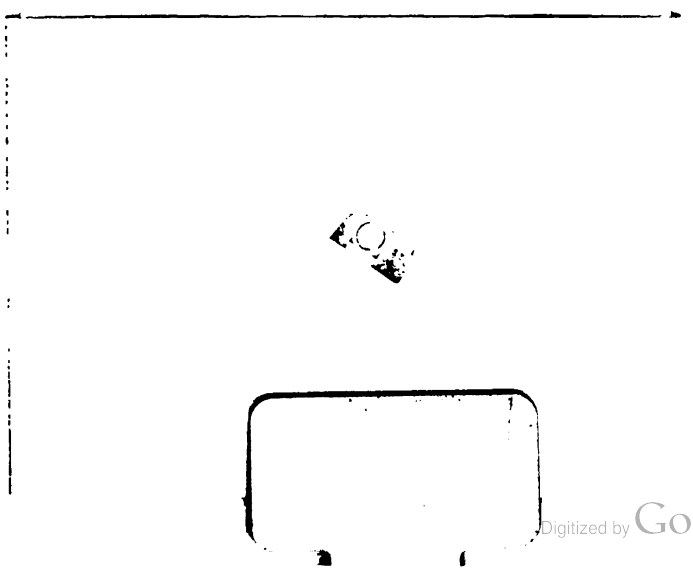
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google


Digitized by Google

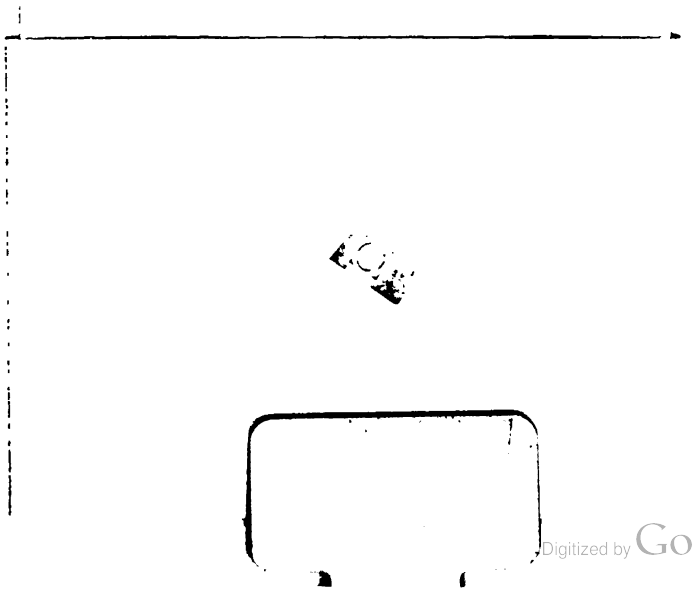
Digitized by Google


Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google


Digitized by Google

Digitized by Google